

## بررسی پارامترهای موثر در فرکانس طبیعی ارتعاشات صفحه‌ای و خارج از صفحه‌ای تیر کامپوزیتی چند لایه

ابوذر اباذری

abuzarabazari@yahoo.com

استادیار دانشکده مهندسی دریا، دانشگاه دریانوردی و علوم دریایی چابهار

### چکیده

امروزه استفاده از سازه‌های کامپوزیتی به علت نسبت استحکام به وزن بالا و خصوصیات مناسب ارتعاشاتی در بسیاری از صنایع مخصوصاً سازه‌های دریایی بیش از پیش مورد توجه قرار گرفته است. یکی از پایه‌های ترین اجزای تشکیل دهنده بسیاری سازه‌ها می‌تواند به صورت یک تیر در نظر گرفته شود که نقش مهمی در طراحی سازه‌ای دارد لذا بررسی تیر کامپوزیتی لایه‌ای از لحاظ ارتعاشاتی یکی از مسائل پایه‌ای در تولیدات صنعتی است. متفاوت بودن خصوصیات مکانیکی در جهات مختلف<sup>۱</sup> به طراح امکان ایجاد طرح‌های مختلف و مناسب برای بارگذاری و شرایط مرزی خاص می‌دهد تا از اثرات مخرب تشدید در سازه‌ها که منجر به خرابی می‌شود، ممانعت به عمل آید. در مطالعه حال حاضر با استفاده از روش‌های تحلیلی مانند تئوری تیموشنکو و اولر برنولی با کمک از تئوری کلاسیک ورق‌ها فرکانس طبیعی ارتعاشات در صفحه X- $\gamma$  و Y-Z برای یک نمونه تیر تقویت شده با الیاف شیشه بدست می‌آید سپس با مدلسازی به روش اجزای محدود در نرم افزار انسیس ارزیابی از صحت نتایج این روش انجام می‌شود. مشاهده می‌شود که نتایج به یکدیگر نزدیک است. بعد از آن تاثیر پارامترهایی مانند زاویه الیاف و ابعاد تیر در سه بعد روی میزان فرکانس ارتعاشات در هر دو صفحه مورد بررسی و مقایسه قرار می‌گیرد. در انتها با لایه‌چینی‌های مختلف چیدمانی متناظر با بیشترین فرکانس بدست آورده می‌شود.

**واژگان کلیدی:** تیر کامپوزیت چند لایه، فرکانس طبیعی، چیدمانی لایه‌ها، تئوری تیموشنکو و اولر برنولی.

تاریخ دریافت مقاله : ۹۶/۰۱/۲۲  
تاریخ پذیرش مقاله : ۹۶/۱۲/۱۱

<sup>۱</sup>Anisotropy

## ۱- مقدمه

امروزه ساختارهای کامپوزیت لایه‌ای تقویت شده با الیاف کاربردهای زیادی در صنایع دریایی و عمران و... دارند. استحکام بالا نسبت به وزن و تحمل تنشهای خستگی و دوام بالا مزیت‌های این سازه‌ها نسبت به سازه‌های فلزی است. بررسی ویژگی‌های ارتعاشاتی سازه‌ها در چنین صناعی یکی از جنبه‌های مورد علاقه مهندسان در این سالها است. چنانچه فرکانس بار تحریک اعمال شده با فرکانس طبیعی سازه برابر باشد منجر به جابجایی‌های بزرگ و نهایتاً تخریب سازه می‌شود. پیدا کردن فرکانس طبیعی و شکل مدها به طراح کمک می‌کند تا با تغییر وزن و یا میزان میرایی، فرکانس طبیعی سیستم را از فرکانس تحریک برای جلوگیری از پدیده تشدید دور کند. به همین دلیل کامپوزیت‌ها امکان سازگاری با شرایط دینامیکی خاص را دارند [۱].

در این راستا سازه‌های کامپوزیتی خاصی مانند پره‌های توربین، بال هواپیما، پره‌های چرخ بال، تخته شنا و... ضرورت مطالعه ارتعاشات تیر کامپوزیتی را ایجاد می‌کند [۲]. گسترده‌گی تیرهای کامپوزیتی باعث شد روش‌های تحلیلی مختلفی به منظور بررسی ارتعاشات آنها ارائه شود [۳-۵].

تئوری ساده اولر برنولی به علت صرف نظر کردن اثرات برش و کرنش نرمال برای تیرهای نازک مناسب بود و برای تیرهای انیزوتروپیک<sup>۱</sup> و ضخیم کارایی خوبی نداشت به همین دلیل تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول تیموشنکو که اثرات برش را در نظر می‌گرفت بهبود یافت که البته به علت ثابت بودن کرنش برشی در امتداد ضخامت یک فاکتور تصحیحی برای آن نیز تعریف شد [۵]. در ادامه افراد زیادی در تیرهای لایه گذاری شده تحقیق کرده‌اند، مایلر و ادامز ارتعاشات ورق یک سر آزاد- یک سر درگیر را برای تیر ارتوتروپیک بدون اثرات برش بررسی کردند [۶]. در ادامه حل دقیقی بر اساس تئوری تیموشنکو کامپوزیت لایه‌ای متقارن برای ۱۰ شرط مرزی ارائه داد [۷]. سپس یک حل تحلیلی برای تیر کامپوزیت [شکل FRP بر اساس تئوری خطی و لاسو ارائه شد [۸].

در ادامه مطالعات زیادی بر اساس تئوری لایه‌ای کلاسیک (تئوری مرتبه اول تیموشنکو و تئوری مرتبه بالاتر) انجام

شد. در این راستا ارتعاشات خارج از صفحه تیر کامپوزیتی cross-ply متقارن با روش ماتریس متقارن انجام شد و همچنین اثرات تغییر شکل برشی و اینرسی چرخشی نیز اعمال شد [۹].

همچنین در مطالعه‌ای تئوری مرتبه بالاتری برای تیرهای دو سر ساده کامپوزیتی لایه‌ای و ساندوچی با سطح مقطع ضخیم و نازک گوناگون ارائه شد [۱۰]. ضمناً تحلیل‌های اجزا محدود زیادی در این زمینه ارائه شد. مثلاً یک تئوری برای تیرهای کامپوزیتی ارائه شد و یک مقایسه بین نتایج تحلیلی تئوری و اجزا محدود تحلیل‌های استاتیکی و ارتعاشاتی در کامپوزیت‌های cross-ply و angle-ply انجام شد [۱۱].

ضمناً به روش اجزا محدود بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول یک تحلیل ارتعاشاتی برای تیرهای کامپوزیتی لایه‌ای ارائه شد [۱۲، ۱۳]. در تحقیقی دیگر تحلیل‌های ارتعاشات آزاد تیرهای کامپوزیتی لایه‌ای<sup>۲</sup> با استفاده از جابجایی دو مرتبه بالاتر بر اساس تئوری تغییر شکل برشی و اجزا محدود ارائه شد [۱۴]. در مطالعه‌ای دیگر روابطی بر مبنای حساب تغییرات و تیوری تغییر شکل برشی مرتبه بالاتر ارائه شد [۱۵]. تیوری تغییر شکل برشی برای تحلیل سختی دینامیکی تیرهای لایه‌ای کامپوزیتی نیز مورد استفاده قرار گرفت [۱۶].

تمرکز بیشتر مطالعات قبلی روی ارتعاشات خارج از صفحه‌ای بوده‌است در مطالعه حال حاضر اثرات ابعاد تیر و و زاویه الیاف و چیدمانی لایه‌های مختلف هم در ارتعاشات خارج از صفحه و هم ارتعاشات صفحه‌ای بررسی می‌شود.

## ۲- نمونه مورد مطالعه

در این پژوهش یک تیر کامپوزیتی لایه‌چینی شده با الیاف شیشه و رزین اپوکسی با ابعاد ۳۰،۷۰۰ و ۳ میلی‌متر (شکل (۱)) مورد از لحاظ ارتعاشاتی مطالعه قرار می‌گیرد. خصوصیات مکانیکی این تیر مانند مدول الاستیسیته و مدول برشی و ضریب پواسون در جهت‌های طولی و عرضی و ضخامت باید به عنوان پارامترهای ورودی در روش تحلیلی و اجزا محدود وارد شوند (جدول (۱)) که این خصوصیات بر اساس یک تحقیق انتخاب شده است [۱۷].

<sup>۲</sup> Laminated Composite Beams (LCBs)<sup>۱</sup> Unisotropic

می توان ورق را تحت بارگذاری محوری و برشی داخل صفحه‌ای در نظر گرفت که منجر به معادله زیر برای کرنش می‌شود

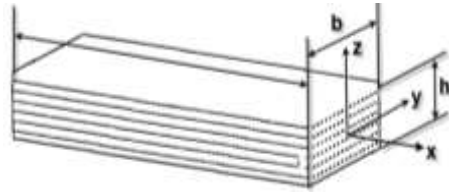
$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (1)$$

که عبارت موجود در کروشه اول و دوم در سمت راست تساوی به ترتیب کرنش‌ها و انحنای صفحه میانی می‌باشند. بعد از آن رابطه تنش با کرنش‌ها و انحنای بدست می‌آید و سپس با انتگرال‌گیری از هر لایه، نیرو و ممان در واحد طول در صفحه X-Y در راستای ضخامت ورق به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xs} \\ Q_{xy} & Q_{yy} & Q_{ys} \\ Q_{xs} & Q_{ys} & Q_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} \int_{h_{k-1}}^{h_k} dz + \\ \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xs} \\ Q_{xy} & Q_{yy} & Q_{ys} \\ Q_{xs} & Q_{ys} & Q_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \int_{h_{k-1}}^{h_k} dz \end{array} \right\} \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xs} \\ Q_{xy} & Q_{yy} & Q_{ys} \\ Q_{xs} & Q_{ys} & Q_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} \int_{h_{k-1}}^{h_k} z dz + \\ \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xs} \\ Q_{xy} & Q_{yy} & Q_{ys} \\ Q_{xs} & Q_{ys} & Q_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \int_{h_{k-1}}^{h_k} z^2 dz \end{array} \right\} \quad (3)$$

و نهایتاً با توجه به نوع هندسه و کمی محاسبات، می‌توان انتگرال‌ها را حل نمود. علاوه بر این، سختی‌ها برای هر لایه منحصر به فرد هستند. بنابراین به رابطه زیر می‌توان دست یافت.



شکل (۱) تیر اولر بونولی بعد از تغییر شکل.

جدول (۱) خصوصیات مکانیکی تیر کامپوزیت لایه‌ای با الیاف شیشه.

مقدار	پارامتر ویژگی ماده
۴۶٫۷	مدول الاستیسیته در راستای طولی $E_1 (GPa)$
۱۴٫۷	مدول الاستیسیته در راستای عرضی $E_2 (GPa)$
۱۴٫۷	مدول الاستیسیته در راستای عرضی $E_3 (GPa)$
۲۰۴۰	چگالی کامپوزیت $\rho_c (kg/m^3)$
۵٫۳۵	مدول برشی در صفحه ۱-۲ $G_{12} (GPa)$
۵٫۳۵	مدول برشی در صفحه ۱-۳ $G_{13} (GPa)$
۵٫۲۲	مدول برشی در صفحه ۲-۳ $G_{23} (GPa)$
۰٫۳۱	ضریب پواسون ۱-۲ $\nu_{12}$
۰٫۳۱	ضریب پواسون ۱-۳ $\nu_{13}$
۰٫۴۱	ضریب پواسون ۲-۳ $\nu_{23}$
٪۶۰	درصد حجمی الیاف

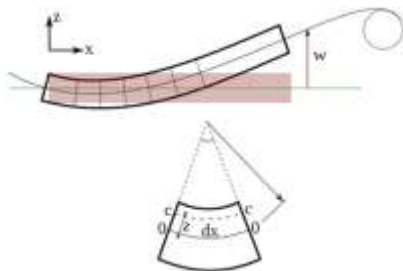
### ۳- مفاهیم تئوری تورق کلاسیک و تیموشنکو و اولر بونولی

#### ۳-۱- تئوری تورق کلاسیک:

با استفاده از تئوری تورق کلاسیک (CLT) می‌توان رابطه جابجایی-کرنش در سه بعد را برای ورق لایه‌گذاری شده تحت بارهای محوری و برشی و ممان خمشی و پیچشی بدست آورد. در این راستا فرض‌های زیر در نظر گرفته می‌شود:

- هر لایه همگن و اورتوتروپیک است.
- لایه نازک است و به صورت داخل صفحه بارگذاری می‌شود.
- جابجایی‌ها در راستای لایه کوچک و پیوسته هستند.
- هر لایه الاستیک است (رابطه تنش-کرنش خطی است).
- لغزشی بین لایه‌ها وجود نمی‌آید.
- کرنشهای برشی عرضی قابل نظر کردن است.
- کرنش عمودی عرضی قابل نظر کردن است.

جابجایی‌های کوچک و بارگذاری جانبی کاربرد دارد در حقیقت این تئوری حالت خاصی از تئوری تیموشنکو است که برای محاسبه تغییر شکل برشی مورد استفاده قرار می‌گیرد و به تیرهای ضخیم اعمال می‌شود. بعد از خمش تیر اولر برنولی هر سطح مقطع تیر نسبت به محور خنثی با زاویه ۹۰ درجه باقی می‌ماند.



شکل (۲) تیر اولر برنولی بعد از تغییر شکل.

تیر مورد تحلیل در این مطالعه اورتوتروپیک است و دو محور تقارن Y و Z دارد. جرم نیز نسبت به این محورها متقارن است. فرکانس زاویه‌ای تیر کامپوزیتی لایه‌ای به صورت زیر بدست می‌آید [۱۸ و ۱۹]:  
ارتعاشات در صفحه x-z:

$$(\omega_i^B)^2 = \frac{\overline{EI}_{yy}}{\rho} \left( \frac{\mu_{Bi}}{L} \right)^4 \quad (8)$$

ارتعاشات در صفحه x-y:

$$(\omega_i^B)^2 = \frac{\overline{EI}_{zz}}{\rho} \left( \frac{\mu_{Bi}}{L} \right)^4 \quad (9)$$

سختی‌های معادل طبق روابط زیر بدست می‌آیند:

$$\overline{EI}_{yy} = \frac{b}{d_{11}} \quad (10)$$

$$\overline{EI}_{zz} = \frac{1}{a_{11}} \frac{b^3}{12} \quad (11)$$

### ۳-۳- تئوری تیموشنکو

تئوری تیموشنکو برای محاسبه تغییر شکل برشی و اثرات اینرسی چرخشی مناسب است که برای تحلیل رفتار تیرهای کوتاه و تیرهای کامپوزیتی ساندویچی و یا تیرهای تحت تحریک‌های با فرکانس بالا که طول موجشان نزدیک به ضخامت تیر است، مناسب است (شکل (۳)). این تئوری فرض عمود بودن صفحات بر خط مرکزی تغییر شکل یافته را دیگر در نظر نمی‌گیرد و کرنش برشی را برای مجموعه در نظر می‌گیرد.

$$[N]_{x,y} = \left[ \sum_{k=1}^n [Q]_{x,y}^k (h_k - h_{k-1}) \right] [\varepsilon^0]_{x,y} + \left[ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n [Q]_{x,y}^k (h_k^2 - h_{k-1}^2) \right] [\kappa]_{x,y}$$

$$[M]_{x,y} = \left[ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n [Q]_{x,y}^k (h_k^2 - h_{k-1}^2) \right] [\varepsilon^0]_{x,y} + \left[ \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n [Q]_{x,y}^k (h_k^3 - h_{k-1}^3) \right] [\kappa]_{x,y}$$

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n [Q]_{x,y}^k (h_k - h_{k-1}), B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n [Q]_{x,y}^k (h_k^2 - h_{k-1}^2), D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n [Q]_{x,y}^k (h_k^3 - h_{k-1}^3) \quad (4)$$

[A], [B] و [C] به ترتیب ماتریس‌های سختی کششی، کوپلینگ و خمشی هستند. با ترکیب معادلات می‌توان به یک رابطه ماتریسی کلی رسید که نیروها و ممان‌ها را توسط ABD ماتریس به ماتریس کرنش و انحنا ارتباط دهد و سپس با معکوس کردن رابطه ماتریسی حاصل می‌توان رابطه کرنش و انحنا را برحسب ماتریس نیرو و ممانها به صورت زیر بدست آورد.

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} & b_{11} & b_{12} & b_{16} \\ a_{11} & a_{22} & a_{26} & b_{12} & b_{22} & b_{26} \\ a_{16} & a_{26} & a_{66} & b_{16} & b_{26} & b_{66} \\ b_{11} & b_{12} & b_{16} & d_{11} & d_{12} & d_{16} \\ b_{12} & b_{22} & b_{26} & d_{12} & d_{22} & d_{26} \\ b_{16} & b_{26} & b_{66} & d_{16} & d_{26} & d_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon^0 \\ \kappa \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} \quad (6)$$

که [a] [b] [c] [d] به ترتیب ماتریس تسلیم، کششی، کوپلینگ و خمشی می‌باشند و به صورت زیر بدست می‌آیند:

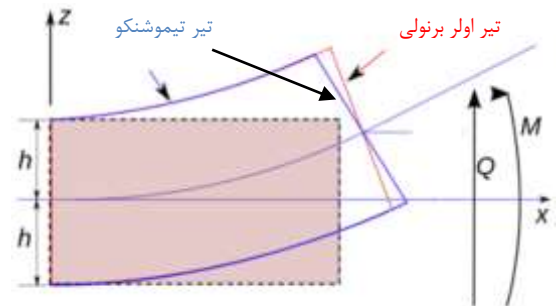
$$\begin{aligned} [a] &= [A]^{-1} - \left\{ [B^*] [D^*]^{-1} \right\} [C^*] \\ [b] &= [B^*] [D^*]^{-1} \\ [c] &= -[D^*]^{-1} [C^*] \text{ also } [C] = [b]^T \\ [d] &= [D^*]^{-1} \end{aligned} \quad \text{and} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} [B^*] &= -[A]^{-1} [B] \\ [C^*] &= [B] [A]^{-1} \\ [D^*] &= [D] - \left\{ [B] [A]^{-1} \right\} [B] \end{aligned}$$

### ۳-۲- تئوری اولر برنولی

تئوری اولر برنولی بر مبنای تئور الاستیسیته خطی است که برای محاسبه حداکثر با متحمل شده و خیز تیر مورد استفاده قرار می‌گیرد (شکل (۲)). این تئوری در محدوده

تحلیل‌های غیر خطی کرنش بزرگ و چرخش‌های بزرگ و تحلیل‌های خطی مناسب است. تغییر در ضخامت المان برای تحلیل‌های غیر خطی در نظر گرفته می‌شود و ضمناً برای مدلسازی کامپوزیت‌های لایه‌ای و ساندویچی استفاده می‌شود. تئوری حاکم بر این المان تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی است. شکل زیر هندسه، موقعیت گره‌ها و سیستم مختصات مربوطه المان را نشان می‌دهد.



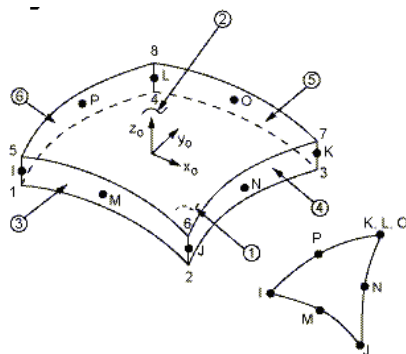
شکل (۳) تیر اولر برنولی بعد از تغییر شکل.

#### ۴-۲- نوع تحلیل

آنالیز مودال برای تعیین فرکانس طبیعی تیر کامپوزیتی استفاده می‌شود و روش بلاک لانسوز<sup>۲</sup> برای حل معادلات حاکم در آنالیز مودال برای بدست آوردن ۶ تا از شکلهای مد کاربرد دارد.

#### ۵- ارزیابی نتایج تحلیلی و اجزا محدود

نتایج فرکانس طبیعی ۶ مود اول مربوط به ارتعاشات خمشی صفحه‌ای (X-Y) و خارج از صفحه‌ای (X-Z) توسط نرم افزار انسیس و تئوری اولر برنولی و تیموشنکو در شکل‌های (۵) و (۶) نشان داده شده‌است. نمونه مورد مطالعه در اینجا تیر کامپوزیتی چهار لایه‌ای با جهت‌یابی زاویه‌ای یکنواخت است. که زاویه تمامی الیاف ۴۰ درجه است. با استفاده از کدنویسی در نرم افزار مطلب بر اساس روابط بیان شده در قسمت قبل پارامترهایی مانند ماتریس ABD، سختی خمشی معادل و دیگر ویژگیهای ورق کامپوزیتی لایه‌ای بدست آمد و بعد از آن با اعمال تئوری‌های اولر برنولی و تیموشنکو فرکانس‌ها بدست آمده است.



شکل (۴) المان shell281 در نرم افزار انسیس.

اگر مدول برشی ماده تیر نامحدود باشد و بنابراین تیر در برش مانند جسم صلب عمل کند و اگر اثرات اینرسی پیچشی صرف‌نظر شود، تئوری تیموشنکو به تئوری تیر معمولی تبدیل می‌شود. فرکانس زاویه‌ای تیر تیموشنکو به صورت زیر بدست می‌آید [۱۹ و ۲۰]:

$$\frac{1}{\omega_i^2} = \frac{1}{(\omega_i^b)^2} + \frac{1}{(\omega_i^s)^2} \quad (12)$$

$$(\omega_{yi}^s)^2 = \frac{S_{zz}}{\rho} \left( \frac{\mu_{si}}{L} \right)^2 \quad (13)$$

$$(\omega_{zi}^s)^2 = \frac{S_{yy}}{\rho} \left( \frac{\mu_{si}}{L} \right)^2 \quad (14)$$

$$S_{zz} = \frac{5}{6} b \int_{-h/2}^{h/2} Q_{55} dZ \quad (15)$$

$$\overline{Q_{55}} = G_{13} \cos^2 \theta + G_{23} \sin^2 \theta \quad (16)$$

سختی برشی در جهت Y (سختی برشی جانبی) با رابطه زیر تعیین می‌شود

$$S_{yy} = \frac{b}{1.2a_{66}} \quad (17)$$

#### ۴- تحلیل به روش اجزا محدود با انسیس<sup>۱</sup>

##### ۴-۱- نوع المان

SHELL281 المانی است که در نرم افزار انسیس برای مدلسازی ساختارهای با پوسته‌های نازک تا نسبتاً کلفت استفاده می‌شود. این المان ۸ گره دارد که هر گره شش درجه آزادی دارد. درجات آزادی شامل جابجایی خطی در جهت x، y، z و چرخش حول محورهای x، y و z است که در شکل (۴) نشان داده شده است. این المان برای

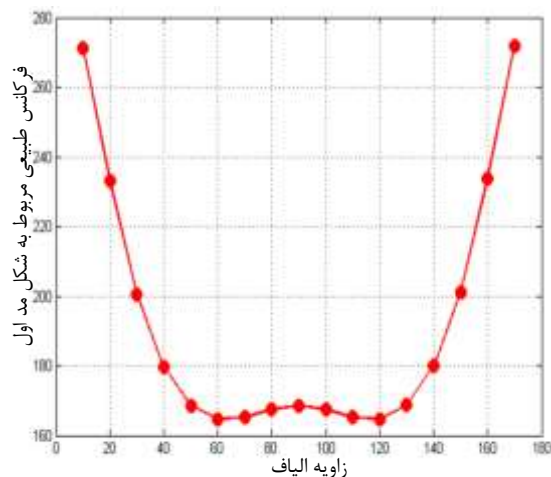
<sup>2</sup> Block Lanczos

<sup>1</sup> Ansys

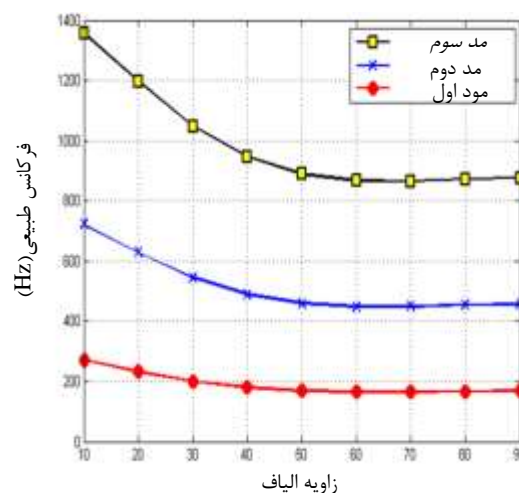
## ۶- تاثیر پارامترهای موثر در ارتعاشات

## ۶-۱ تاثیر زاویه الیاف

بعد از اعتبار سنجی نتایج روش اجزا محدود، تاثیر زاویه الیاف در محدوده مقادیر ۰ تا ۱۸۰ درجه روی نتایج فرکانس طبیعی مربوط به شکل مود اول در ارتعاشات ورق در صفحات  $X-Y$  در شکل نشان داده شده است. همانطور که پیش بینی می شد مطابق شکل ۷ یک تقارن اطراف زاویه ۹۰ درجه به علت تقارن در سختی ورق وجود دارد. در ادامه برای مقایسه بیشتر نتایج فرکانس طبیعی شش مود اول برای ارتعاشات در صفحه  $X-Y$  و  $X-Z$  دست می آید (شکل های ۸-۱۱). به طور کلی با تغییر زاویه تا زاویه ۵۰ درجه در هر شش حالت با مقدار فرکانس با شیب نسبتاً تندی مقادیر فرکانس کم می شود و این شیب از ۵۰ تا ۹۰ درجه هموارتر است.



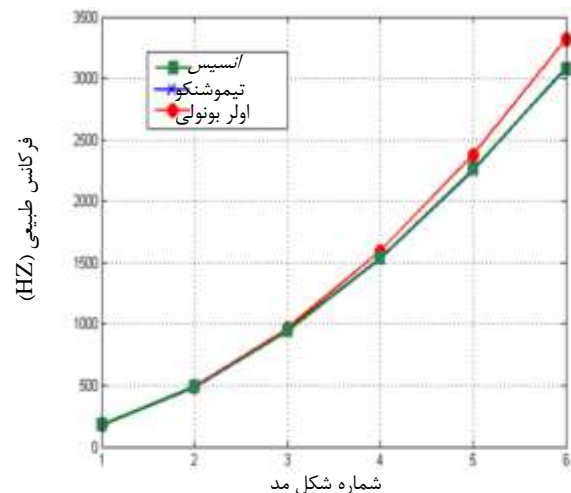
شکل (۷) تاثیر زاویه الیاف در فرکانس طبیعی مود اول در صفحه  $X-Y$ .



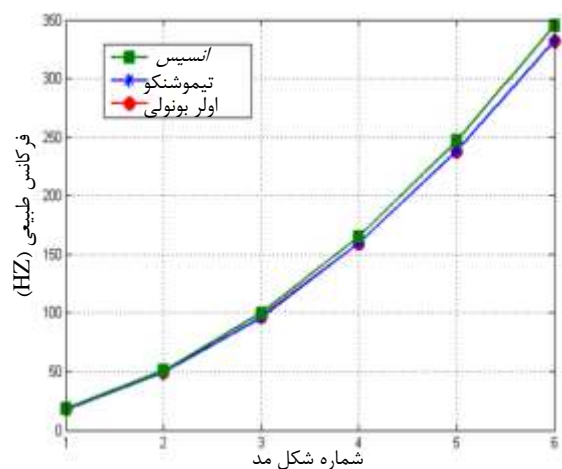
شکل (۸) تاثیر زاویه الیاف در فرکانس طبیعی مودهای ارتعاشات صفحه  $X-Y$ .

همانطور که مشاهده می شود نتایج، اختلاف کمی با یکدیگر دارند و در حالت ارتعاشات در صفحه  $X-Y$  نتایج مقادیر فرکانس طبیعی مربوطه شکل های مد روش اولر برنولی بالاتر از دو روش دیگر است و این به علت این است که تئوری برنولی، تیر را با انعطاف کمتری نسبت به دو روش دیگر در نظر می گیرد. اما این نکته در مورد ارتعاشات ورق در صفحه  $X-Z$  برقرار نیست و مقادیر فرکانس طبیعی بدست آمده از انسیس بیشتر است.

ضمناً نظر به اینکه الیاف در صفحه  $X-Y$  می باشند و هنگام خمش حول محور  $Z$ ، صفحه مقاومت بیشتری نسبت به خمش حول محور  $Y$  نشان می دهد و ارتعاشات در صفحه  $X-Z$  نسبت به صفحه  $X-Y$  راحت تر است و فرکانس طبیعی نیز کمتر می شود.



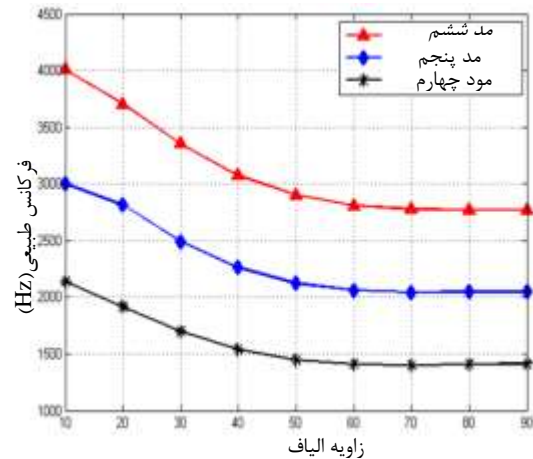
شکل (۵) مقایسه نتایج فرکانس طبیعی ارتعاشات در صفحه  $X-Y$  به روش های تحلیلی و اجزا محدود.



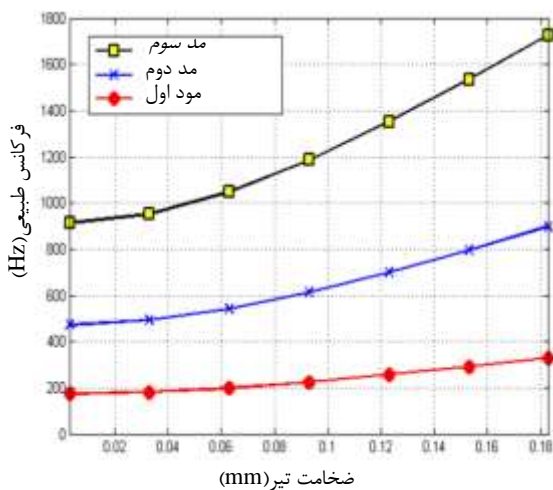
شکل (۶) مقایسه نتایج فرکانس طبیعی ارتعاشات در صفحه  $X-Z$  به روش های تحلیلی و اجزا محدود.

۲-۶- تاثیر طول و پهنا و ضخامت

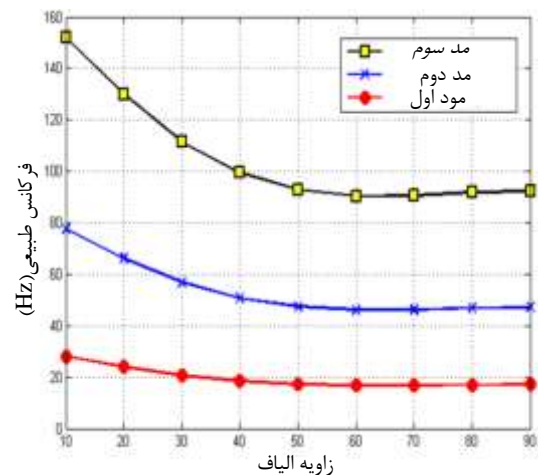
ابعاد اصلی تیر ۰,۷,۰,۰۳ و ۰,۰۰۳ متر است و در این قسمت تاثیر تغییرات این پارامترها روی فرکانس طبیعی با نرم افزار انسیس بررسی می شود. نکته قابل ذکر این است که تغییرات به دو صورت انجام شده است در یک حالت دامنه تغییرات در طول و پهنا و ضخامت به یک میزان (گام های ۰,۰۲ متر) صورت می گیرد که این گام برای سه جهت ضخامت، پهنا و طول است و در حالت دیگر دامنه تغییرات با گامهایی به میزان حدودا ۱۰۰ درصد مقادیر طول و پهنا و ضخامت صورت می گیرد. انتخاب این دو گام به این علت بوده تا اثرات هر دو افزایش از جنبه های مختلف دیده شود.



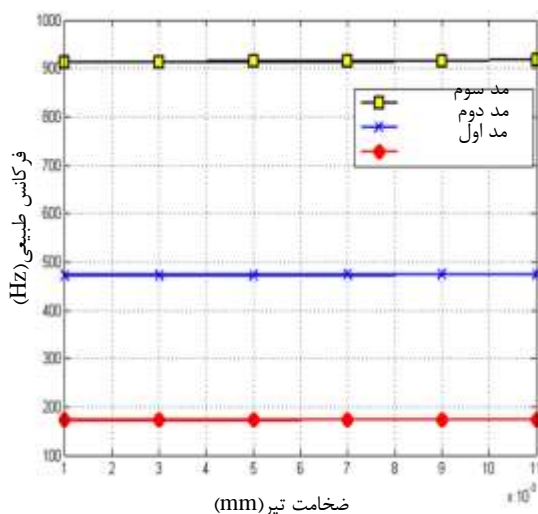
شکل (۹) تاثیر زاویه الیاف در فرکانس طبیعی مودهای ارتعاشات صفحه X-Y.



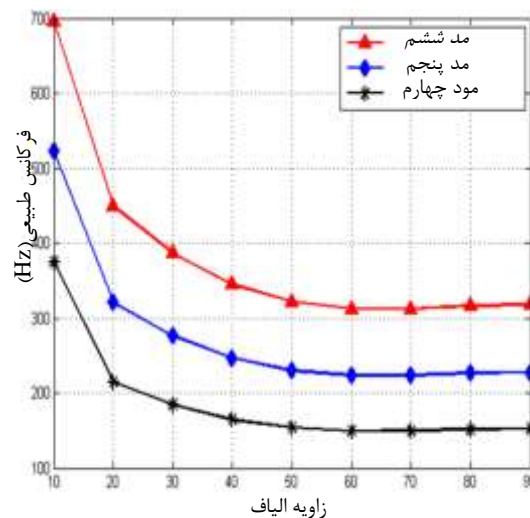
شکل (۱۲) تاثیر ضخامت تیر در فرکانس طبیعی ارتعاشات صفحه X-Y افزایش ضخامت با گام های ۰,۰۲ متر.



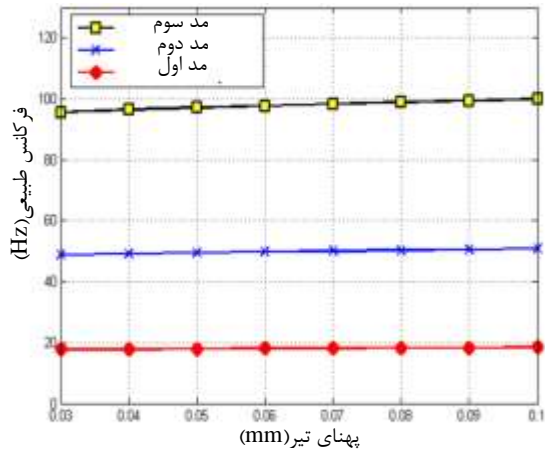
شکل (۱۰) تاثیر زاویه الیاف در فرکانس طبیعی مودهای ارتعاشات صفحه X-Z.



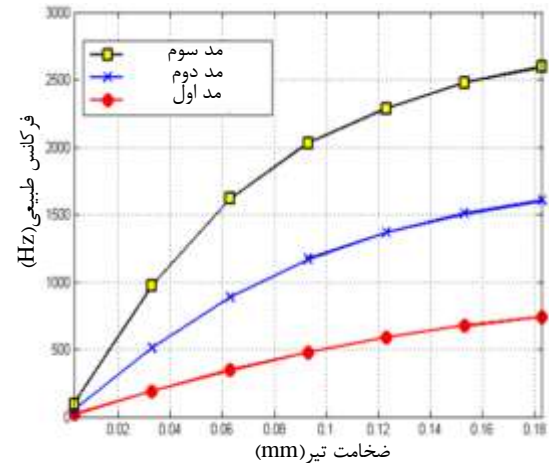
شکل (۱۳) تاثیر ضخامت تیر در فرکانس طبیعی ارتعاشات صفحه X-Y افزایش ضخامت با گام هایی به اندازه ضخامت تیر.



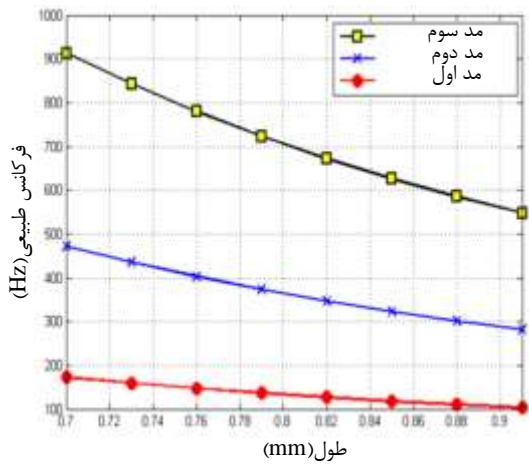
شکل (۱۱) تاثیر زاویه الیاف در فرکانس طبیعی مودهای ارتعاشات صفحه X-Z.



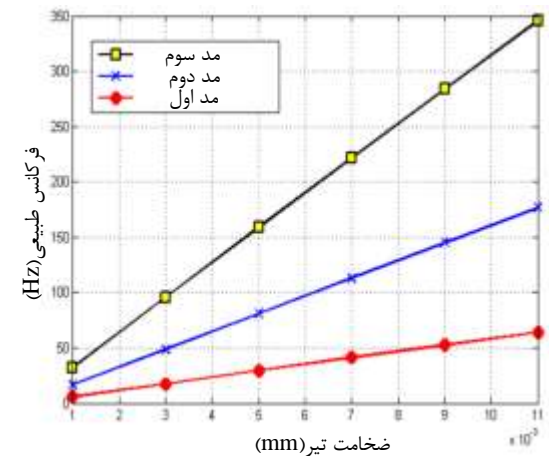
شکل (۱۷) تاثیر پهنای در فرکانس طبیعی ارتعاشات صفحه X-Z افزایش پهنای با گامهای ۰,۰۲ متر.



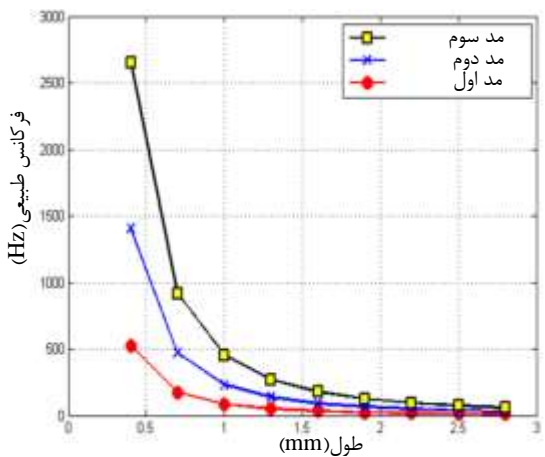
شکل (۱۴) تاثیر ضخامت تیر در فرکانس طبیعی ارتعاشات صفحه X-Z افزایش ضخامت با گامهای ۰,۰۲ متر.



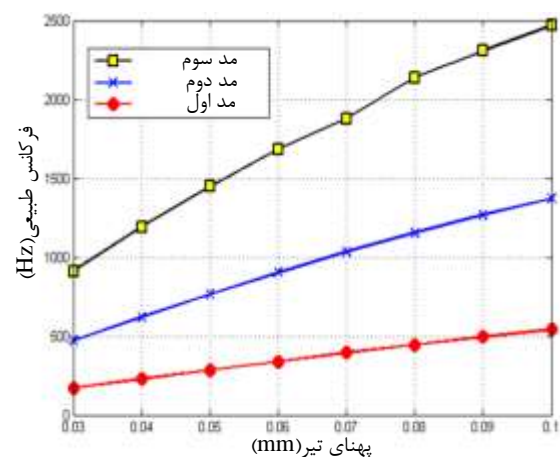
شکل (۱۸) تاثیر طول در فرکانس طبیعی ارتعاشات صفحه X-Y افزایش طول با گامهای ۰,۰۲ متر.



شکل (۱۵) تاثیر ضخامت تیر در فرکانس طبیعی ارتعاشات صفحه X-Z افزایش ضخامت با گامهایی به اندازه ضخامت تیر.



شکل (۱۹) تاثیر طول در فرکانس طبیعی ارتعاشات صفحه X-Y افزایش ضخامت با گامهای به اندازه طول اولیه تیر.



شکل (۱۶) تاثیر پهنای در فرکانس طبیعی ارتعاشات صفحه X-Y افزایش پهنای با گامهای ۰,۰۲ متر.



با افزایش پهنا فرکانس طبیعی ارتعاشات در صفحه  $x-y$  با شیب تندی افزایش می‌یابد در حالی که افزایش فرکانس طبیعی ارتعاشات در صفحه  $x-z$  با شیب کمی بوجود می‌آید زیرا بواسطه افزایش پهنا، ممان اینرسی حول محور  $z$  نیز در ارتعاشات صفحه  $x-y$  به طور چشمگیری در مقایسه با صفحه  $x-z$  افزایش می‌یابد و البته شیب افزایش فرکانس در شکل مدهای بالاتر بیشتر می‌شود. با افزایش طول و بدنبال آن کاهش سختی تیر فرکانس طبیعی ارتعاشات  $x-z$  و  $x-y$  کاهش می‌یابد. این کاهش برای شکل مدهای بالاتر با شیب بیشتری انجام می‌شود. و روی هم رفته میزان کاهش فرکانس در ارتعاشات صفحه  $x-y$  نسبت به ارتعاشات  $x-z$  چشم گیرتر است.

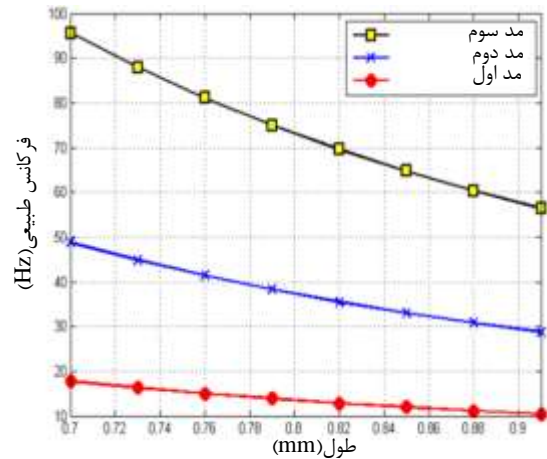
به طور کلی در ارتعاشات در صفحه  $x-y$  تغییرات پهنا در مقایسه با تغییر طول و ضخامت تاثیرات بیشتری روی مقدار فرکانس طبیعی دارد و در ارتعاشات  $x-z$  تغییرات ضخامت در مقایسه با تغییر طول و پهنا تاثیرات بیشتری روی مقدار فرکانس طبیعی دارد. در همه حالات ارتعاشات (صفحه  $x-y$  و صفحه  $x-z$ )، شیب تغییرات (کاهش یا افزایش) با افزایش شماره شکل مود افزایش می‌یابد.

قابل ذکر است که با مقایسه تغییرات با دو گام، گامهایی که به اندازه ابعاد اولیه ضخامت و طول و پهنا می‌باشند به طور کلی نمی‌تواند معیاری برای برآیند کلی روند تغییرات فرکانس باشد و پیش‌بینی بر اساس صرفاً این گام، تشخیص موثرترین پارامتر، ضخامت و پهنا و طول را با ابهام روبه‌رو می‌کند.

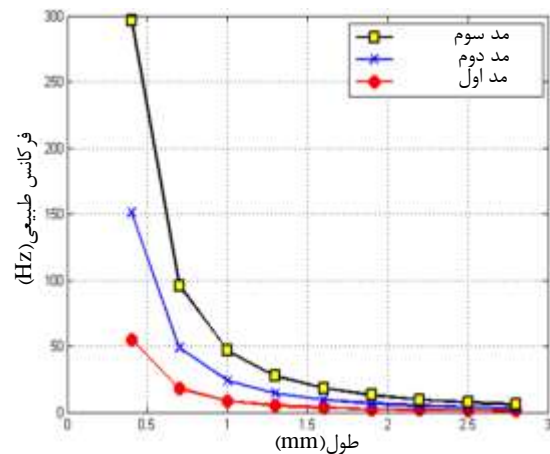
### ۳-۶ تاثیر چیدمان زاویه الیاف در فرکانس ارتعاشات

در این قسمت به تاثیر زاویه الیاف در میزان فرکانس طبیعی ارتعاشات صفحه  $x-y$  و  $x-z$  پرداخته می‌شود. تیر با همان ابعاد اولیه در نظر گرفته می‌شود. بنا به نوع لایه چینی در بعضی جاها تعداد لایه‌ها فرق می‌کند ولی مدلسازی تیر کامپوزیت لایه‌ای با در نظر گرفتن ضخامت یکسان برای تیر در حالت‌های مختلف انجام می‌شود و ضخامت تمام لایه‌ها در یک حالت یکسان است. طرح‌های مختلفی برای تیرهای کامپوزیتی به صورت زیر می‌تواند در نظر گرفته شود:

کامپوزیت چندلایه‌ای متقاطع ۱: اگر زاویه الیاف در لایه‌ها فقط ۹۰ و ۰ درجه باشد (۰/۹۰/۰/۹۰)



شکل (۲۰) تاثیر طول در فرکانس طبیعی ارتعاشات صفحه  $x-z$  افزایش ضخامت با گام‌های ۰.۰۲ متر.

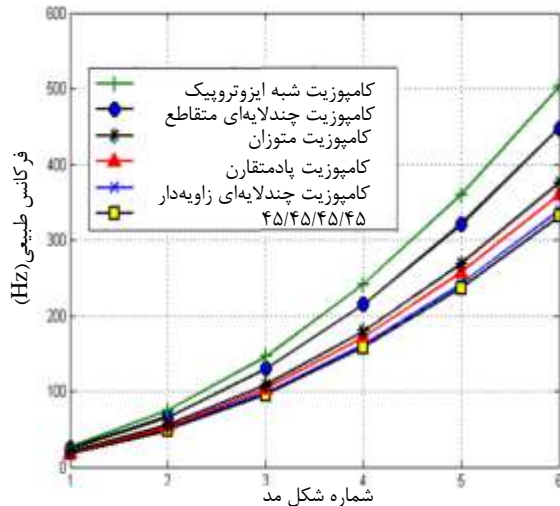


شکل (۲۱) تاثیر طول در فرکانس طبیعی ارتعاشات صفحه  $x-z$  افزایش ضخامت با گام‌هایی به اندازه طول اولیه تیر.

نهایتاً می‌توان نتایج زیر بر اساس شکل‌های (۱۲)-(۲۱) استنتاج کرد:

اگر مبنای مقایسه افزایش گام یکسان در سه بعد باشد، با افزایش ضخامت فرکانس طبیعی ارتعاشات در هر دو صفحه  $x-y$  و  $x-z$  افزایش می‌یابد این افزایش در صفحه  $x-z$  چشمگیرتر از صفحه  $x-y$  است زیرا با افزایش ضخامت ممان اینرسی حول محور  $y$  افزایش بیشتری نسبت به ممان حول محور  $z$  دارد. همچنین شیب تغییرات در صفحه  $x-y$  برای تمامی شکل مدها در ضخامتهای بیشتر، بیشتر و شیب تغییرات در صفحه  $x-z$  برای تمامی شکل مدها در ضخامتهای بیشتر، کمتر می‌شود.

<sup>1</sup> Cross-Ply Laminate



شکل (۲۳) فرکانس طبیعی ارتعاشات تیر کامپوزیتی در صفحه x-z در لایه چینی‌های مختلف نسبت به شکل مودهای مختلف.

شیب تغییرات در حالتی که مقدار فرکانس بیشتری دارند نیز با افزایش شماره شکل مد بیشتر می‌شود. چیدمانی یک جهته الیاف در (۴۵/۴۵/۴۵/۴۵) همانطور که انتظار می‌رود بیشترین انعطاف پذیری و کمترین فرکانس را نتیجه می‌دهد.

#### ۷- نتیجه‌گیری

نتایج تحلیل ارتعاشاتی تیر کامپوزیتی با استفاده از روابط اولر برنولی و تیموشنکو و روش اجزا محدود بسیار مطابق یکدیگر می‌باشند. در ارتعاشات یک تیر کامپوزیتی چند لایه در صفحه x-y تغییرات پهنا در مقایسه با تغییر طول و ضخامت تاثیرات بیشتری روی مقدار فرکانس طبیعی دارد و در ارتعاشات x-z تغییرات ضخامت در مقایسه با تغییر طول و پهنا تاثیرات بیشتری روی مقدار فرکانس طبیعی دارد. در بررسی تاثیر زاویه به طور کلی چیدمانی شبه ایزوتروپیک و چندلایه‌ای متقاطع در هر دو ارتعاشات صفحه x-y و x-z نسبت به بقیه چیدمانی‌ها به علت بالا بودن فرکانس طبیعی سخت ترین حالت از لحاظ ارتعاشاتی به شمار می‌آید.

#### ۸- فهرست علائم

$\overline{EI}_{yy}$  سختی خمشی حول محور y,  $N, m^2$

$\overline{EI}_{zz}$  سختی خمشی حول محور z,  $N, m^2$

d11 درایه ۱-۱ از ماتریس تسلیم خمشی کامپوزیت لایه‌ای (1/N.m)

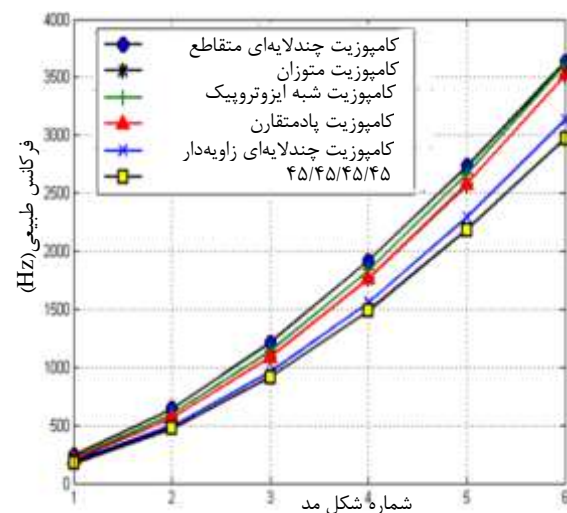
کامپوزیت چندلایه‌ای زاویه‌دار<sup>۱</sup>: اگر ضخامت لایه‌ها با یکدیگر برابر و در جهت‌های  $\theta$  و  $-\theta$  زاویه بندی شوند ((s/۴۵-۴۵)).

کامپوزیت پادمتقارن<sup>۲</sup>: اگر ضخامت و ماده لایه‌ها در بالا و پایین صفحه میانی یکسان باشد اما زاویه بندی الیاف در لایه‌های با فواصل یکسان از صفحه میانی علامت متفاوت داشته باشند (۴۵-۳۰/۳۰/-۴۵).

کامپوزیت متوازن<sup>۳</sup>: اگر لایه‌های به صورت جفت با ضخامت و ماده یکسان داشته باشد و زاویه الیاف به صورت  $\theta$  و  $-\theta$  باشد (۴۵/۳۰-۴۵/۳۰).

کامپوزیت شبه ایزوتروپیک<sup>۴</sup>: اگر ماتریس سختی کششی آن همانند یک ماده ایزوتروپ باشد. لزوماً بدین مفهوم است که کامپوزیت لایه‌ای ب تعداد  $N \geq 3$  لایه با ضخامت یکسان و N زاویه مساوی بین زاویه بندی الیاف مجاور وجود داشته باشد.

با توجه به شکل‌های (۲۲) و (۲۳) چیدمانی شبه ایزوتروپیک و چندلایه‌ای متقاطع در هر دو ارتعاشات صفحه x-y و x-z نسبت به بقیه چیدمانی‌ها به علت بالا بودن فرکانس طبیعی سخت ترین حالت به شمار می‌آید. البته به طور خاص در صفحه x-y چیدمانی چندلایه‌ای متقاطع و در صفحه x-z چیدمانی شبه ایزوتروپیک بالاترین فرکانس طبیعی را دارند.



شکل (۲۴) فرکانس طبیعی ارتعاشات تیر کامپوزیتی در صفحه x-y در لایه چینی‌های مختلف نسبت به شکل مودهای مختلف.

<sup>3</sup> Balanced Laminates

<sup>4</sup> Quasi-Isotropic Laminates

<sup>1</sup> Angle-Ply Laminates

<sup>2</sup> Antisymmetric Laminate

- [11] Tahani M., "Analysis of Laminated Composite Beams using Layerwise Displacement Theories", *Composite Structures*, Vol.79, pp.535-47. 60, 2007.
- [12] Jun, L., Hongxing, H., Rongying, S., "Dynamic Finite Element Method for Generally Laminated Composite Beams", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol.50, pp.466-480, 2008.
- [13] Jun, L., Hongxing, H., Rongying, S., "Dynamic Stiffness Analysis for Free Vibrations of Axially Loaded Laminated Composite Beams", *Composite Structures*, Vol.84, pp.87-98, 2008.
- [14] Subramanian, P., "Dynamic Analysis of Laminated Composite Beams using Higher Order Theories and Finite Elements", *Composite Structures*, Vol.73, pp.342-353, 2006.
- [15] Qu, Y., Long, X., Li, H., Meng G., "A Variational Formulation for Dynamic Analysis of Composite Laminated Beams based on a General Higher-order Shear Deformation Theory", *Composite Structures*, Vol.102, pp.175-192, 2013.
- [16] Li, J., Hua H., "Dynamic Stiffness Analysis of Laminated Composite Beams using Trigonometric Shear Deformation Theory", *Composite Structures*, Vol.89, No.3, pp.433-442, 2009.
- [17] Gay, D., Hoa, S.V., Tsai, S.W., *Composite Materials Design and Applications*, Boca Raton, London New York, Washington, 2003.
- [18] Carrera, E., Pagani A., "Multi-Line Enhanced Beam Model for the Analysis of Laminated Composite Structures", *Composites Part B: Engineering*, Vol.57, pp.112-119, 2014.
- [19] La'szlo', P., George, S., "Mechanics of Composite Structures", Cambridge University, New York, United States of America, 2003.

درایه ۱-۱ از ماترسی تسلیم کششی کامپوزیت لایه‌ای	$a_{11}$
	(m/N)
طول تیر	$L$
سختی برشی انتقال یافته	$Q_{55}$
زاویه بین جهت الیاف و محور طولی تیر است.	$\theta$
درایه ۶-۶ از ماتریس تسلیم کششی کامپوزیت لایه‌ای	$a_{66}$
است	(m/N)
علایم یونانی	
جرم در واحد	$\rho$
یک فاکتور تصحیح است که به شرایط مرزی بستگی دارد.	
اندیسهای $i = 1, 2, \dots$ مد اول و دوم و... را مشخص می‌کند	$\mu_{Bi}$

## ۹- مراجع

- [1] Tita V, Carvalho J, Lirani J., "Theoretical and Experimental Dynamic Analysis of Fiber Reinforced Composite Beams", *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, Vol.25, pp.306-310, 2003.
- [2] Kapuria S, Alam N., "Efficient Layerwise Finite Element Model for Dynamic Analysis of Laminated Piezoelectric Beams", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.195, pp.2742-2760, 2006.
- [3] Khdeir A.A., Reddy J.N., "Free Vibration of Crossply Laminated Beams with Arbitrary Boundary Conditions", *International Journal of Engineering Science*, Vol.32, pp.1971-1980, 1994.
- [4] Krishnaswamy S., Chandrashekhara K., Wu W.Z.B., "Analytical Solutions to Vibration of Generally Layered Composite Beams", *Journal of Sound and Vibration*, Vol.159, pp.85-99, 1992.
- [5] Matsunaga H., "Vibration and Buckling of Multilayered Composite Beams According to Higher Order Deformation Theories", *Journal*, 2001.
- [6] Miller A.K, Adams D.F., "An Analytic Means of Determining the Flexural and Torsional Resonant Frequencies of Generally Orthotropic Beams", *Journal of Sound and Vibration*, Vol.41, pp.433-449, 1975.
- [7] Abramovich H., "Shear Deformations and Rotary Inertia Effects of Vibrating Composite Beams", *Composite Structures*, Vol.20, pp.165-73, 1992.
- [8] Qiao Pizhong, A., Guiping, Z., "Free Vibration Analysis of Fiber-Reinforced Plastic Composite Cantilever I-Beams", *Mechanics of Advanced Materials and Structure*, Vol.9, pp.359-373, 2002.
- [9] Yöldöröm V, Koral E., "Investigation of the Rotary Inertia and Shear Deformation Effects on the Out-of-plane Bending and Torsional Natural Frequencies of Laminated Beams", *Composite Structures*, Vol.49, pp 313-320, 2000.
- [10] Rao M.K., Desai, Y.M., Chitnis, M.R., "Free Vibrations of Laminated Beams using Mixed Theory", *Composite Structures*, Vol.52, pp.149-60, 2001.