

تحلیل امواج خطی در محیط دریایی با استفاده از روش بدون شبکه حداقل مربعات گسسته مختلط

پرویز قدیمی^۱، مرتضی کلاهدوزان^۲، صائب فرجی^۳

pghadimi@aut.ac.ir

- ۱- استاد دانشکده مهندسی دریا، دانشگاه امیر کبیر
- ۲- استادیار دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه امیر کبیر
- ۳- دانشجوی دکتری مهندسی عمران، دانشگاه امیر کبیر

چکیده

روش‌های بدون شبکه از جمله روش‌های عددی هستند که در سال‌های اخیر به دلیل مزایایی که نسبت به روش‌های مبتنی بر المان در مواجهه با مسائل با مرزهای متحرک داشته‌اند، مورد توجه قرار گرفته‌اند. روش بدون شبکه حداقل مربعات گسسته مختلط از جمله روش‌های بدون شبکه است که به علت استفاده از فرمول‌بندی مختلط دقت جواب‌ها را افزایش داده است. همچنین، این روش به دلیل استفاده از فرم قوی معادلات (روش‌های هم‌مکان)، کاملاً بدون شبکه است. روش ارائه شده بر مبنای حداقل کردن تابع باقیمانده‌ای است که تابع باقیمانده‌ای به صورت حاصل جمع باقیمانده معادله دیفرانسیلی حاکم و شرایط مرزی، تعریف شده است. با توجه به اهمیت تحلیل مناسب از پدیده موج دریا، برای طراحی سازه‌های درگیر با موج دریا و کارایی و دقت بالای روش بدون شبکه حداقل مربعات گسسته مختلط، در در مقاله حاضر، این روش عددی برای تحلیل امواج خطی در محیط دریایی گسترش داده شده است و با حل مثال‌های عددی، کارایی و دقت روش پیشنهادی مورد ارزیابی قرار گرفته است. جواب‌های بدست آمده، دقت مناسب روش پیشنهادی را برای حل معادله حاکم بر موج خطی نشان می‌دهند. با استفاده از یک گام زمانی مناسب، و برای ارتفاع موج‌های مختلف خطای روش پیشنهادی از حدود ۱۰ درصد تا ۶ درصد متغیر بوده است. علاوه بر این، با بررسی هزینه محاسباتی تولید توابع شکل و مشتقات مورد نیاز روش پیشنهادی و مقایسه آن با روش قبلی حداقل مربعات گسسته، کاهش چشمگیری در کاهش هزینه محاسباتی نیز مشاهده می‌شود.

واژگان کلیدی: روش بدون شبکه، روش بدون شبکه حداقل مربعات گسسته مختلط، معادله لاپلاس، موج خطی.

تاریخ دریافت مقاله : ۹۵/۰۳/۰۲

تاریخ پذیرش مقاله : ۹۶/۰۵/۰۴

۱- مقدمه

روش‌های بدون شبکه به علت عدم نیاز به المان‌بندی‌هایی که در روش‌های مبتنی بر المان (از جمله اجزای محدود و حجم محدود) مرسوم هستند، هزینه گسسته‌سازی را نسبت به روشهای مبتنی بر المان کاهش داده‌اند. علاوه بر این، این روش‌ها در مواجهه با پدیده‌هایی با مرزهای متحرک (که در پدیده‌های مکانیک سیالاتی بسیار رایج هستند) نیز با مشکلات روش‌های مبتنی بر المان مواجه نیستند. از طرف دیگر روش‌های بدون شبکه کارایی بالایی خود را در حل مسایلی با تغییرشکل‌های زیاد و ناپیوستگی‌ها نشان داده‌اند. از این رو، در سالیان اخیر روش‌های بدون شبکه^۱ از جمله روش‌های عددی بوده‌اند که در حل مسائل مختلف مورد توجه قرار گرفته‌اند.

فرآیند حل در روش‌های بدون شبکه شامل سه مرحله اصلی گسسته‌سازی، تولید توابع تخمینی (توابع شکل یا توابع کرنل) و حل است. روش‌های بدون شبکه را از نظر تولید توابع تخمینی می‌توان به دو گروه عمده روش‌های مبتنی بر تابع چند جمله‌ای (تابع پایه^۲) و روش‌های مبتنی بر توابع انتگرالی (تابع کرنل) تقسیم کرد. روش‌های مبتنی بر تابع کرنل معمولاً به طور مستقیم از خود توابع وزن برای تولید تابع تخمین استفاده می‌کنند و از این لحاظ هزینه محاسباتی تولید توابع تخمین در آنها بسیار پایین است، در مقابل، مرتبه پایین پیوستگی توابع تخمینی آنها باعث می‌شود تا دقت جواب‌های بدست آمده از این روش‌ها تا میزان زیادی نسبت به روش‌هایی که از تابع چند جمله‌ای استفاده می‌کنند، کاهش یابد. از جمله روش‌هایی که از توابع انتگرالی استفاده می‌کنند، می‌توان به روش بدون شبکه هیدرودینامیک ذره هموار^۳ [۱] و روش نیمه ضمنی ذرات متحرک^۴ [۲] اشاره کرد. روش‌هایی که از تابع چند جمله‌ای استفاده می‌کنند هزینه محاسباتی زیادی برای تولید توابع تخمین (توابع شکل) صرف می‌کنند ولی محصول این هزینه محاسباتی زیاد مرتبه بالای پیوستگی توابع تخمین آنها است که منجر به جواب‌هایی با دقت بسیار بیشتر نسبت به روش‌های مبتنی بر

تابع کرنل می‌شود. از جمله این روش‌ها می‌توان به روش گالرکین بدون جزء^۵ [۳] و روش پتروف-گالرکین موضعی بدون شبکه^۶ [۴] اشاره کرد. مزیت این روش‌ها این است که قدرت تخمین تابع شکل در آنها افزایش یافته است. از دیگر روش‌های بدون شبکه می‌توان به روش نقطه محدود^۷، روش ابرهای hp^۸، روش ابرهای محدود^۹، اشاره کرد. روش بدون شبکه حداقل مربعات گسسته^{۱۰} [۵] که اولین بار توسط افشار و ارزانی برای حل معادلات پواسون ارائه شد، از روش حداقل مربعات متحرک^{۱۱} برای تولید توابع شکل استفاده می‌کند، این روش کارایی خود را در حل مسائل جامداتی [۶] و سیالاتی [۷] به خوبی نشان داده است.

اخیراً، فرمول‌بندی مختلط در روش بدون شبکه حداقل مربعات گسسته به کار گرفته شده و از آن برای حل مسائل الاستیسیته خطی مسطح استفاده شده است؛ این روش حداقل مربعات گسسته مختلط^{۱۲} [۸] نامیده شده است. این روش همچنین برای حل معادلات مشتقات جزئی مرتبه دوم ریاضیاتی نیز گسترش داده شده است [۹]. در روش حداقل مربعات گسسته مختلط، ناحیه مساله با استفاده از گره‌هایی گسسته‌سازی شده و سپس جواب مساله با استفاده از توابع تخمین حداقل مربعات متحرک تخمین زده می‌شود با کمینه کردن تابع باقیمانده‌ای نسبت به مقادیر مجهول گره‌ی، مقدار جواب در گره‌ها محاسبه می‌شود. تابع باقیمانده‌ای از مجموع باقیمانده حاصل از قرار گیری تابع تخمینی در شرط معادله دیفرانسیلی حاکم بر مساله و باقیمانده حاصل از قرار گیری آن در شرایط مرزی بدست می‌آید. در فرمول‌بندی مختلط، مرتبه مشتقات مورد نیاز یک مرتبه کاهش می‌یابد. به این ترتیب یک معادله دیفرانسیلی مرتبه دوم تنها با استفاده از مشتقات مرتبه اول توابع تخمین گسسته می‌شود و دیگر نیازی به محاسبه مشتقات مرتبه دوم توابع تخمین، که از لحاظ محاسباتی بسیار هزینه بر هستند، نیست. علاوه بر این با توجه به دقت بالاتر مشتقات مرتبه اول توابع تخمین نسبت به مشتقات دوم توابع تخمین، دقت روش نیز یک مرتبه افزایش می‌یابد [۹،۸].

⁸ Hp Clouds

⁹ Finite Clouds (FC)

¹⁰ Discrete Least Squares Meshless (DLSM)

¹¹ Moving Least Squares (MLS)

¹² Mixed Discrete Least Squares Meshless (MDLSM)

¹ Meshfree Methods

² Basic Functions

³ Smoothed Particle Hydrodynamic (SPH)

⁴ Moving Partial Semi-implicit (MPS)

⁵ Element Free Galerkin Meshless (EFGM)

⁶ Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG)

⁷ Finite Point (FP)

$$w_j(d) = \begin{cases} \frac{2}{3} - 4d^2 + 4d^3 & d \leq \frac{1}{2} \\ \frac{4}{3} - 4d + 4d^2 - \frac{4}{3}d^3 & \frac{1}{2} \leq d < 1 \\ 0 & d > 1 \end{cases} \quad (۴)$$

اگر شعاع ناحیه تاثیر گره z ام با dw_j نشان داده شود $d = \|X - X_j\| / dw_j$ است. با کمینه کردن رابطه (۳)، تابع جواب تخمینی به صورت رابطه (۵) بدست می‌آید.

$$\varphi(X) = P^T(X)F^{-1}(X)M(X)\bar{\varphi} \quad (۵)$$

در رابطه (۵) بردار جواب‌های گرهی است و ضرایب F و M در روابط (۶) و (۷) معرفی شده‌اند.

$$F(X) = \sum_{j=1}^{num_s} w_j(X - X_j)P(X_j)P^T(X_j) \quad (۶)$$

$$M(X) = [w_1(X - X_1)P(X_1), \dots, w_{num_s}(X - X_{num_s})P(X_{num_s})] \quad (۷)$$

با جمع‌بندی روابط (۵-۷)، رابطه (۸) به دست می‌آید.

$$\varphi(X) = A^T(X)\bar{\varphi} \quad (۸)$$

در رابطه (۸) A تابع تخمین (تابع شکل) است که از رابطه (۹) بدست می‌آید.

$$A^T = P^T(X)F^{-1}(X)M(X) \quad (۹)$$

با مشتق‌گیری جزئی از تابع تخمین، مشتقات نسبی آن به دست می‌آیند، که در روابط (۱۰) و (۱۱) ارائه شده‌اند.

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial P^T}{\partial x}F^{-1}M + P^T\frac{\partial F^{-1}}{\partial x}M + P^TF^{-1}\frac{\partial M}{\partial x} \quad (۱۰)$$

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial P^T}{\partial y}F^{-1}M + P^T\frac{\partial F^{-1}}{\partial y}M + P^TF^{-1}\frac{\partial M}{\partial y} \quad (۱۱)$$

۳- گسسته‌سازی معادله موج خطی با روش حداقل

مربعات گسسته مختلط

در این بخش، روش حداقل مربعات گسسته مختلط، برای حل معادله لاپلاس که رفتار پدیده موج خطی را تشریح می‌کند گسترش داده شده است. در روش حداقل مربعات مختلط مشتقات مرتبه دوم با استفاده از فرمول‌بندی مختلط با مشتقات مرتبه اول تابع شکل جایگزین می‌شوند. بنابراین دقت محاسبات به دلیل عدم نیاز به مشتقات مرتبه دوم، یک مرتبه افزایش می‌یابد. در این روش بعد از محاسبه توابع شکل و مشتقات مرتبه اول آنها با استفاده از روش MLS، با

با توجه به ویژگی‌هایی که برای روش حداقل مربعات گسسته مختلط ارائه شد، در این مطالعه این روش برای اولین بار جهت حل معادلات حاکم بر تئوری موج خطی گسترش داده شده است و با حل مثال‌های عددی کارایی و دقت مناسب روش نشان داده شده است.

۲- تابع تخمین حداقل مربعات متحرک

در روش‌های بدون شبکه از روش‌های مختلفی برای تولید توابع تخمینی استفاده می‌شود که از جمله آنها می‌توان به روش تابع پایه شعاعی^۱ [۱۰]، روش بیشینه انتروپی^۲ [۱۱]، روش جزءبندی واحد^۳ [۱۲] و روش کریجینگ متحرک^۴ [۱۳] اشاره کرد. روش تابع تخمین حداقل مربعات متحرک [۱۴]، یکی از معمول‌ترین روش‌های تخمین جواب در روش‌های بدون شبکه است که کارایی خود را به خوبی نشان داده است. در این مقاله از این روش برای تولید توابع تخمینی استفاده شده است. در این روش برای هر گره از ناحیه گسسته شده یک زیر ناحیه تاثیر^۵ در نظر گرفتن می‌شود و تابع تخمینی در هر زیر ناحیه تاثیر از رابطه (۱) محاسبه می‌شود.

$$\varphi(X) = \sum_{i=1}^s p_i(X)c_i(X) = P^T(X)c(X) \quad (۱)$$

رابطه (۲)، تابع پایه P را معرفی کرده است.

$$P^T = [1, x, y, x^2, xy, y^2, \dots, x^n, \dots, y^n]_{1 \times s} \quad (۲)$$

در رابطه (۲)، c بردار ضرایب تابع پایه است و n و s به ترتیب درجه تابع پایه و تعداد مولفه‌های آن را نشان می‌دهند. در رابطه (۳) تابع نرم دوم وزن‌داری معرفی شده است که برای تولید تابع تخمین باید کمینه شود.

$$J = \sum_{j=1}^{num_s} w_j(X - X_j)(P^T(X_j)c(X) - \bar{\varphi}_j)^2 \quad (۳)$$

در رابطه (۳) num_s تعداد کل گره‌های موجود در هر ناحیه تاثیر است. w_j و $\bar{\varphi}_j$ به ترتیب نمایانگر جواب مطلوب و تابع وزن در گره z ام هستند. در این مقاله از تابع وزن اسپلاین مرتبه سوم^۶ استفاده شده است که در رابطه (۴) ارائه شده است.

⁴ Moving Kriging (MK)

⁵ Influence domain

⁶ Cubic spline Weight Function

¹ Radial Basis Function (RBF)

² Maximum Entropy

³ Partition of Unity (PU)

$$U^T = [\lambda \quad \lambda_x \quad \lambda_y] \quad (17)$$

با جاگذاری روابط بدست آمده، مقدار باقیمانده معادله دیفرانسیلی (R_Ω) و باقیمانده شرایط مرزی (R_Γ) به صورت رابطه (۱۸) بدست می‌آیند.

$$\begin{cases} R_\Omega = L(U) \\ R_\Gamma = I(U) - \bar{U} \end{cases} \quad (18)$$

در رابطه (۱۸) \bar{U} مقدار شرایط مرزی و I ماتریس همانی هستند. با جمع دو باقیمانده معادله دیفرانسیلی و باقیمانده شرایط مرزی، باقیمانده کلی به صورت رابطه (۱۹) بدست می‌آید.

$$\sum_{i=1}^n (R_\Omega^T R_\Omega)_i + \alpha (R_\Gamma^T R_\Gamma)_i \quad (19)$$

در رابطه (۱۹) α ضریب پنالتی است که باید مقداری به اندازه کافی بزرگ انتخاب شود. با کمینه کردن رابطه (۱۹) نسبت به مجهولات گرهی مقدار این مجهولات در گره‌ها محاسبه می‌شوند.

۴- ارزیابی نتایج

در این مطالعه، برای ارزیابی کارایی و دقت روش ارائه شده از مثالهای عددی که جواب تحلیلی آن موجود است، استفاده شده است. ضریب پنالتی (α) برابر 10^8 اختیار شده است. همچنین در این مطالعه از تابع پایه مرتبه دوم ($n=2, s=6$) استفاده شده است.

۴-۱- مثال اول

در این مثال معادله لاپلاس حاکم که بر اساس تابع جریان می‌باشد حل شده است و جواب‌های بدست آمده از آن، با جواب‌های تحلیلی ارائه شده برای یک موج خطی پیشرونده مقایسه شده‌اند. جواب تحلیلی برای تابع جریان و سرعت در جهات افقی و عمودی در رابطه (۲۰) ارائه شده‌اند.

$$\begin{cases} \psi = -\frac{H g \sinh(k(h+z))}{2 \sigma \cosh(kh)} \cos(kx - \sigma t) \\ u = \frac{H g}{2 \sigma} k \frac{\cosh(k(h+z))}{\cosh(kh)} \cos(kx - \sigma t) \\ w = \frac{H g}{2 \sigma} k \frac{\sinh(k(h+z))}{\cosh(kh)} \sin(kx - \sigma t) \end{cases} \quad (20)$$

برای حل این مثال یک ناحیه به طول L و ارتفاع H در نظر گرفته شده است. شکل (۱) ناحیه گسسته شده را در زمان $t=0$ نشان می‌دهد.

جاگذاری توابع شکل و مشتقات بدست آمده در معادله دیفرانسیلی حاکم و شرایط مرزی، مقادیر باقیمانده‌های معادله دیفرانسیلی و شرایط مرزی بدست می‌آیند که مجموع آنها مقدار کل باقیمانده را معرفی می‌کند. با به حداقل رساندن مقدار این باقیمانده کل نسبت به متغیرهای مجهول گرهی، یک دستگاه معادله حاصل می‌شود که با حل آن مجهولات گرهی محاسبه می‌شوند.

از مزایای فرمول‌بندی مختلط می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

الف- محاسبات مشتق دوم توابع شکل لازم نبوده و می‌توان از همان مشتقات اول توابع شکل که دارای خطای کمتری هستند استفاده کرد.

ب- به علت عدم نیاز به محاسبه مشتقات مرتبه بالاتر توابع شکل که از نظر محاسباتی بسیار پرهزینه هستند، هزینه محاسباتی روش کاهش می‌یابد.

با فرض جریان غیر چرخشی، معادله دیفرانسیلی حاکم بر پدیده موج در دریا به صورت رابطه (۱۲) بیان می‌شود که در آن λ می‌تواند بیانگر تابع جریان یا تابع پتانسیل باشد.

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial y^2} = 0 \quad (12)$$

با تعریف رابطه (۱۳)

$$\begin{cases} \lambda_x = \frac{\partial \lambda}{\partial x} \\ \lambda_y = \frac{\partial \lambda}{\partial y} \end{cases} \quad (13)$$

معادله (۱۲) به صورت رابطه (۱۴) بازنویسی شده است.

$$\frac{\partial \lambda_x}{\partial x} + \frac{\partial \lambda_y}{\partial y} = 0 \quad (14)$$

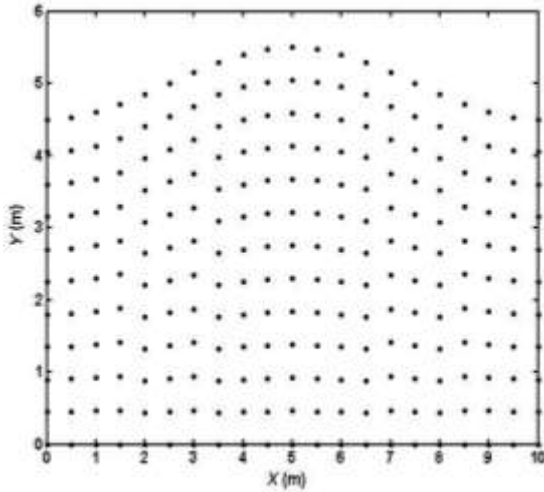
با جمع‌بندی روابط (۱۳) و (۱۴) رابطه (۱۵) حاصل شده است.

$$D(u) = AU_{,x} + BU_{,y} + CU \quad (15)$$

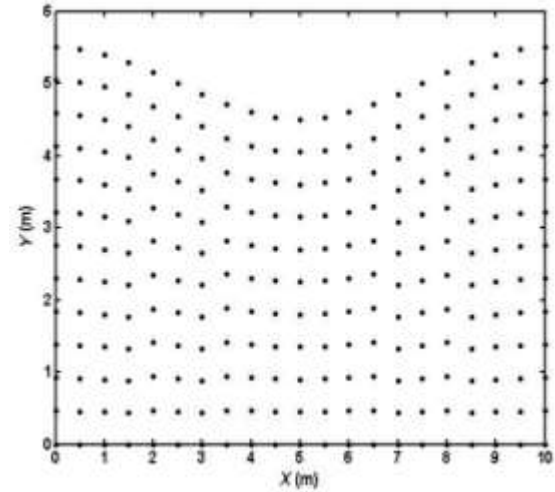
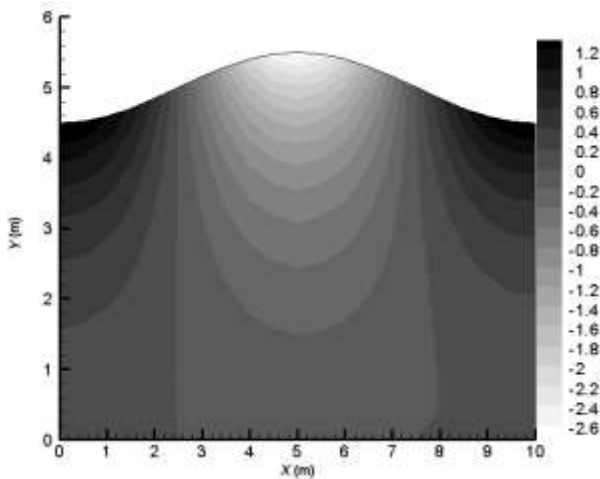
که در رابطه بالا D یک عملگر دیفرانسیلی است و $U_{,x}$ و $U_{,y}$ بیانگر مشتقات جزئی بردار U در جهت x و y هستند. همچنین ماتریس‌های A ، B و C در رابطه (۱۶) معرفی شده‌اند.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

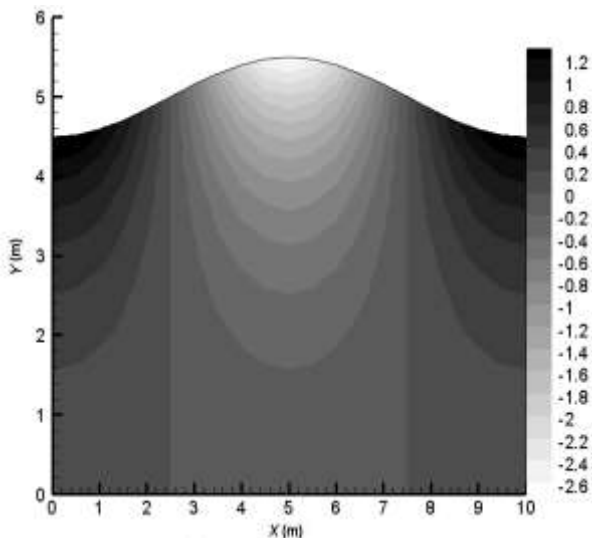
بردار U در رابطه (۱۷) نشان داده شده‌است.



(الف)

شکل (۱) آرایش گره‌ها با ۲۵۱ گره در $t=0$ 

(ب)



(ج)

در این مثال L برابر 10 (m) و h برابر 5 (m) در نظر گرفته شده‌اند و ارتفاع موج برابر 1 (m) اختیار شده است. مقدار عدد موج (k) و فرکانس موج (σ) از رابطه (۲۱) محاسبه شده است.

$$\sigma = \frac{2\pi}{T}, k = \frac{2\pi}{L} \quad (21)$$

با بدست آوردن عدد موج و با توجه به رابطه (۲۲) فرکانس موج و پریود موج (T) محاسبه می‌شوند.

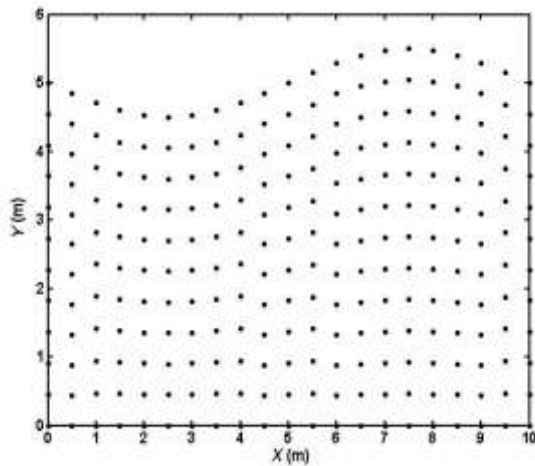
$$\sigma^2 = gk \tanh(kh) \quad (22)$$

برای حل این مثال از سرعت‌های تحلیلی که در سمت چپ و راست ناحیه مسئله و به صورت شرط مرزی نیومن اعمال می‌شوند استفاده شده است. معادله (۲۳) رابطه بین سرعت‌ها و تابع جریان را معرفی می‌کند.

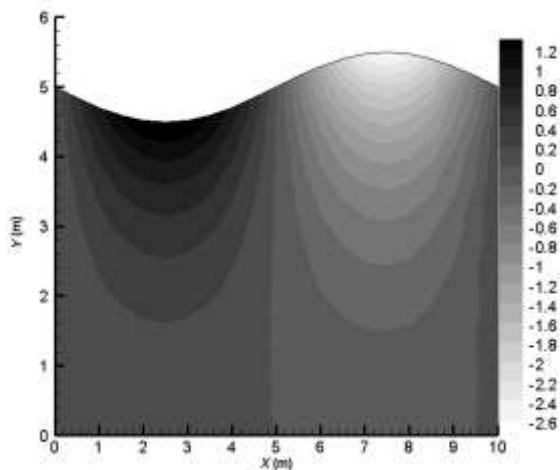
$$\begin{cases} -\frac{\partial \psi}{\partial z} = u \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} = w \end{cases} \quad (23)$$

در مرز بستر مقدار ψ برابر صفر در نظر گرفته شده است و برای سطح آزاد از شرط مرزی دریچله استفاده شده است. برای ارزیابی کارایی روش پیشنهادی جواب‌های روش حداقل مربعات گسسته مختلط با جواب‌های تحلیلی مقایسه شده‌اند. در شکل (۲) ناحیه گسسته شده، و جواب بدست آمده برای تابع جریان و بردارهای سرعت در زمان $t=T/2$ نشان داده شده‌اند و باهم مقایسه شده‌اند.

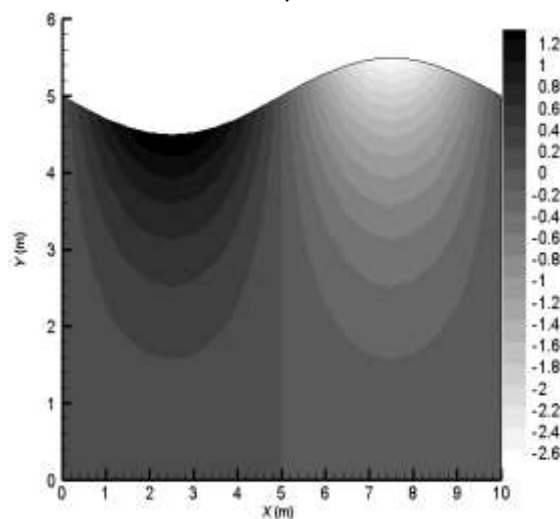
تمام ارتفاع مورد نظر، با Δx در نظر گرفته شده در حالت کلی میسر نیست، تعداد گره‌ها در راستای عمودی طوری تنظیم شده‌اند که علاوه بر گسسته‌سازی تمام فاصله عمودی، نزدیکترین فاصله ممکن را نیز از Δx دارا باشند.



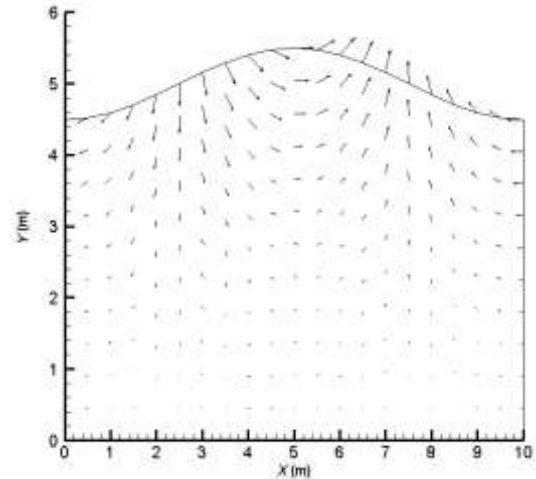
(الف)



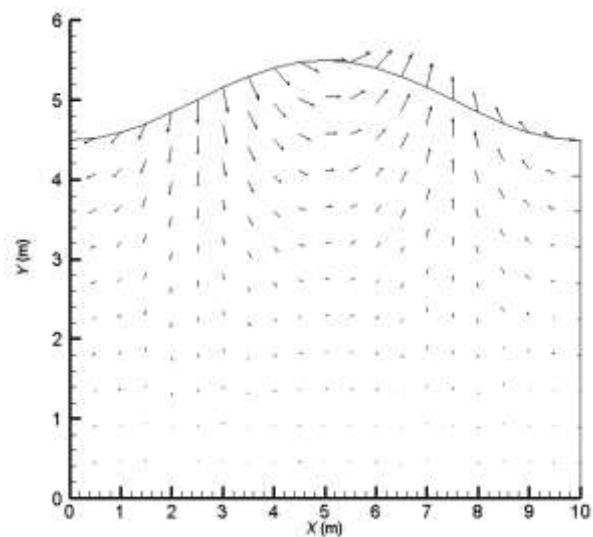
(ب)



(ج)



(د)



(و)

شکل (۲) مقایسه جواب‌های روش MDLSM و جواب تحلیلی در زمان $t=T/2$ (الف) آرایش گره‌ها، (ب) تابع جریان به دست آمده از روش MDLSM، (ج) تابع جریان تحلیلی، (د) بردارهای سرعت بدست آمده از روش MDLSM و (و) بردارهای جواب تحلیلی.

در شکل (۳) ناحیه گسسته شده در زمان $t=3T/4$ نشان داده شده است. در این شکل نتایج بدست آمده برای روش حداقل مربعات گسسته با نتایج تحلیلی در زمان $t=3T/4$ مقایسه شده‌اند. نتایج بدست آمده کارایی و دقت مناسب روش پیشنهادی را نشان می‌دهند.

برای تعیین موقعیت گره‌ها از یک فاصله یکنواخت مشخص عمودی گره‌ها با تقسیم ارتفاع موج در هر مختصات x ، به Δx بدست آمده است. از آنجایی که امکان گسسته‌سازی

در روش DLSM با توجه به مرتبه مشتقات معادلات لاپلاس که از مرتبه دوم است، مشتقات مرتبه دوم توابع شکل نیز که از نظر هزینه محاسباتی بسیار پر هزینه‌اند نیز مورد نیاز هستند. در مقابل با استفاده از فرمول‌بندی مختلط در روش MDLSM نیازی به مشتقات مرتبه دوم نیست (مراجعه به رابطه (۱۴)). بنابراین هزینه محاسباتی تا حد زیادی کاهش می‌یابد. توجه به این نکته لازم است که هزینه ارائه شده در جدول (۱) فقط اختصاص به یک گام زمانی دارد و با افزایش تعداد گام‌های زمانی، هزینه محاسباتی روش MDLSM به مراتب کمتر از روش پیشین DLSM خواهد شد.

۴-۲- مثال دوم

در این مثال معادله لاپلاس حاکم که بر اساس تابع پتانسیل می‌باشد حل شده است. و جواب‌های بدست آمده از آن با جواب‌های تحلیلی ارائه شده برای یک موج خطی مقایسه شده است. برای این منظور چون جواب‌های تحلیلی موجود بر اساس شرایط مرزی خطی شده محاسبه شده‌اند در روش عددی نیز از این شرایط مرزی استفاده شده است. شرایط مرزی خطی شده برای یک بستر ثابت در رابطه (۲۴) ارائه شده است.

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad (24)$$

شرط مرزی خطی شده سینماتیکی و دینامیکی برای سطح آزاد به ترتیب در روابط (۲۵) و (۲۶) ارائه شده‌اند.

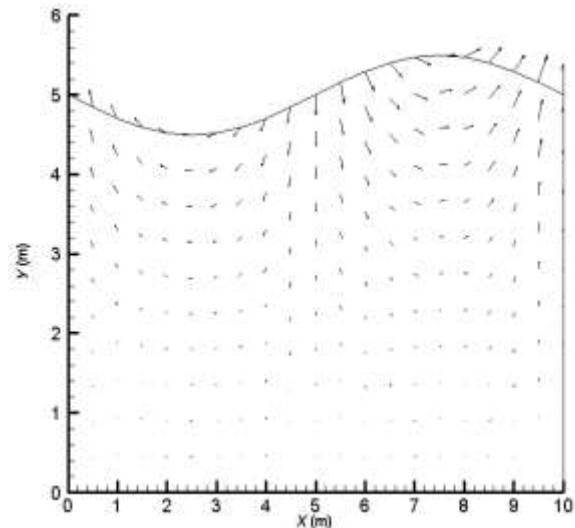
$$-\frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad (25)$$

$$-\frac{\partial \phi}{\partial t} + g\eta = 0 \quad (26)$$

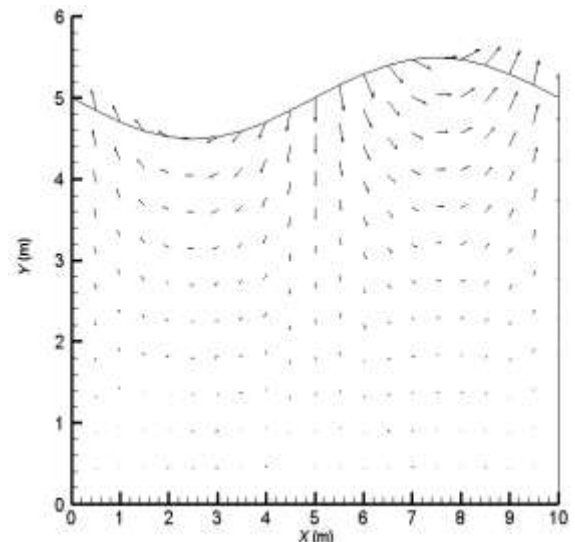
معادله (۲۷) روابط بین سرعت‌ها و تابع پتانسیل در جهات افقی و عمودی را نشان می‌دهد.

$$\begin{cases} w = -\frac{\partial \phi}{\partial z} \\ u = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \end{cases} \quad (27)$$

در این مثال نیز از شرایط مرزی سرعت‌ها (نیومن) در مرز چپ و راست استفاده شده است و برای بستر سرعت در راستای عمود بر مرز صفر اختیار شده است. برای سطح آزاد از شرط مرزی دریچله استفاده شده است. ابتدا در گام زمانی صفر معادله لاپلاس حاکم حل شده و سپس با توجه به شرط مرزی سینماتیکی سطح آزاد (رابطه (۲۵)) مقدار η در گام زمانی بعد با استفاده از رابطه (۲۸) محاسبه می‌شود و حل به این صورت تا زمان دلخواه ادامه می‌یابد



(د)



(و)

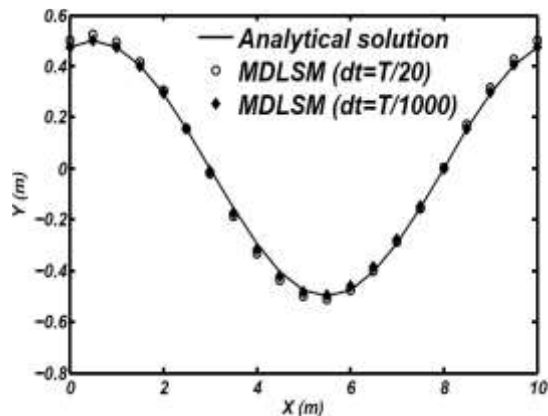
شکل (۳) مقایسه جواب‌های روش MDLSM و جواب تحلیلی در زمان $t=3T/4$ (الف) ناحیه گسسته شده، (ب) تابع جریان به دست آمده از روش MDLSM، (ج) تابع جریان تحلیلی، (د) بردارهای سرعت بدست آمده از روش MDLSM و (و) بردارهای جواب تحلیلی.

برای مثال حل شده در این بخش (آرایی با ۲۵۱ گره)، زمان محاسباتی تولید توابع شکل و مشتقات اول و دوم آن برای یک گام زمانی در جدول (۱) ارائه شده است.

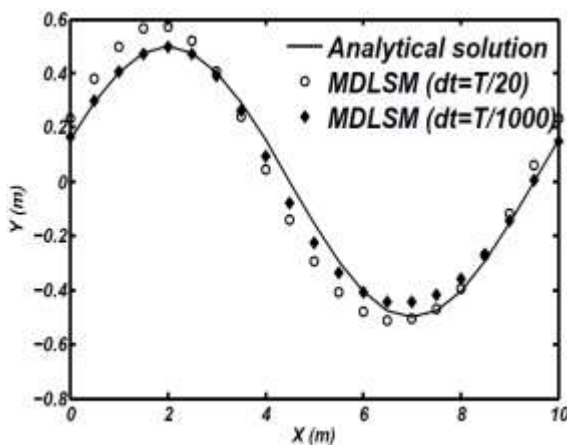
جدول (۱) مقایسه هزینه محاسباتی تولید تابع تخمین در روش‌های DLSM و MDLSM.

هزینه محاسباتی تولید تابع شکل و مشتق اول و دوم (روش DLSM)	هزینه محاسباتی تولید تابع شکل و مشتق اول (روش MDLSM)
1.02 (sec)	0.08 (sec)

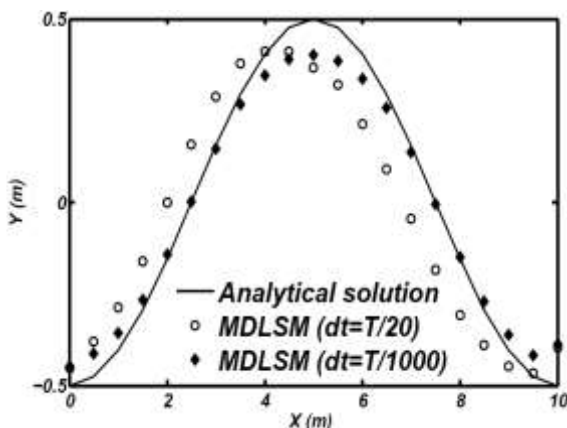
روش‌هایی که از فرمول‌بندی معمولی استفاده می‌کنند یک مرتبه بیشتر است، زیرا در این روش برای گسسته‌سازی پارامترهای مرتبه دوم مشتقات جزئی، از مشتقات مرتبه اول توابع تخمین، که دقتشان یک مرتبه نسبت به مشتقات مرتبه دوم بیشتر است، استفاده می‌شود.



(الف)



(ب)



(ج)

شکل (۴) پروفیل موج برای ارتفاع موجی برابر یک متر: (الف) $t=T/2$ (ب) $t=T/5$ (ج) $t=T/2$

$$\eta^{n+1} = \eta^n - w^n \Delta t \quad (28)$$

در رابطه (۲۸) بالانویس n و $n+1$ نشان دهنده گام زمانی n و $n+1$ ام هستند و Δt بیانگر اندازه گام زمانی است. شکل (۴) نتایج بدست آمده از روش MDLSM را با استفاده از دو گام زمانی متفاوت، با جواب تحلیلی برای موجی به ارتفاع یک متر و در زمان $t=T/2$ بعد از شروع انتشار موج، مقایسه کرده است. برای مقایسه کارایی روش پیشنهادی MDLSM از خطای نرم دوم نسبی به صورت زیر استفاده شده است.

$$error = \frac{\|\eta^{analytical} - \eta^{MDLSM}\|_2}{\|\eta^{exact}\|_2} \quad (25)$$

که در آن $\|\cdot\|_2$ نشان دهنده نرم دوم است. خطای روش پیشنهادی در زمان $t=T/5$ ، در جدول (۲) ارائه شده است.

جدول (۲) خطای نتایج روش MDLSM برای دو گام زمانی متفاوت.

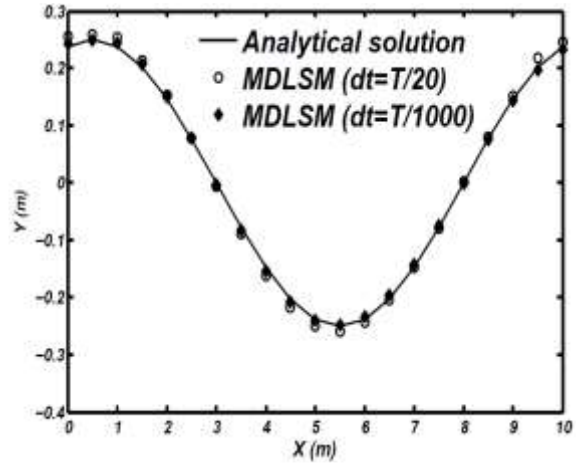
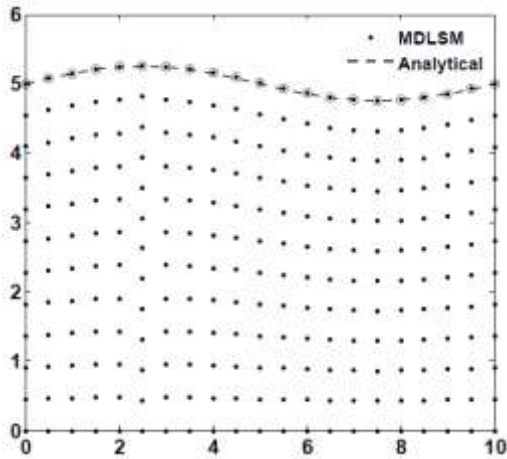
گام زمانی	ارتفاع موج یک متر	ارتفاع موج نیم متر
$\Delta t = T/20$	۰٫۲۲۱۶	۰٫۲۰۴۹
$\Delta t = T/1000$	۰٫۱۰۵۵	۰٫۰۶۵۲

در شکل (۵) نتایج بدست آمده از روش MDLSM برای موجی به ارتفاع نیم متر و در زمان $(T/2)$ بعد از شروع انتشار موج که از دو گام زمانی متفاوت برای حل استفاده کرده است، با جواب تحلیلی مقایسه شده‌اند.

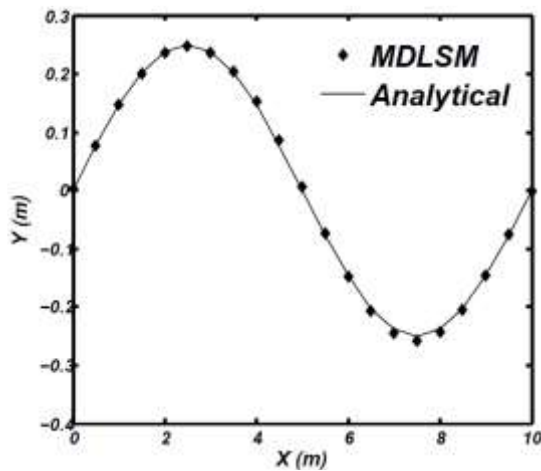
برای ارزیابی روش عددی، نتایج روش که با شروع از شرط مرزی آرام برای سطح آزاد بدست آمده‌اند، در شکل (۶) ارائه شده‌اند. برای این منظور از اطلاعات تحلیلی موجی به ارتفاع نیم متر که در ورودی و خروجی به صورت متناوب است، استفاده شده است. سطح آزاد با توجه به شرط مرزی سینماتیکی بدست آمده و آرایش گره‌ها در راستای عمودی در هر گام، بازآرایی شده است.

۵- نتیجه‌گیری

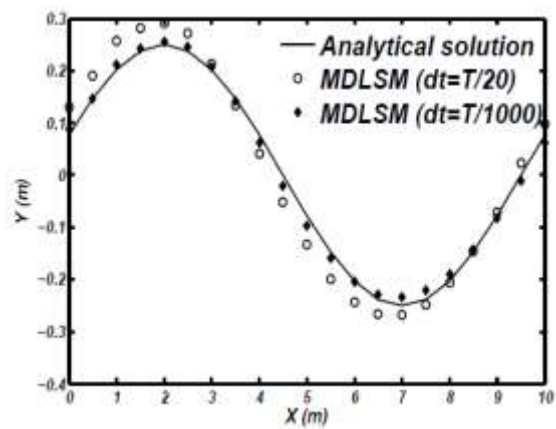
روش حداقل مربعات گسسته مختلط (MDLSM) یک روش عددی بدون شبکه است که کارایی و دقت بالای خود را در حل معادلات حاکم بر مسایل الاستیسیته خطی به خوبی نشان داده است. این روش هزینه محاسباتی را به علت عدم نیاز به محاسبات پرهزینه مشتقات مرتبه دوم توابع تخمین، کاهش داده است. علاوه بر این دقت این روش نسبت به



(الف)



(ب)

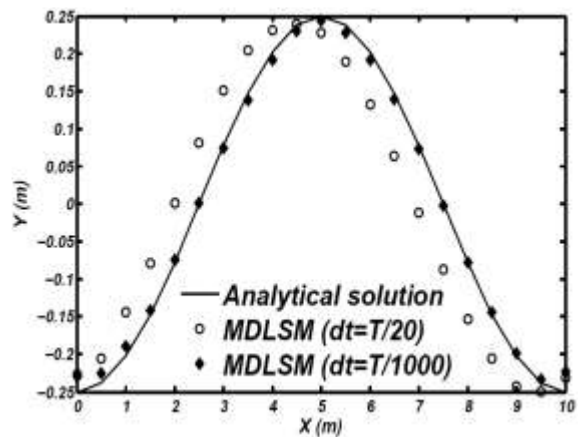


(ج)

شکل (۶) پروفیل موج برای ارتفاع موجی برابر نیم متر با شروع از شرایط آرام اولیه برای سطح آزاد: الف) نمایش در آرایش گرهی ب) نمایش مستقل.

هزینه محاسباتی فرآیند تابع تخمین روش بدون شبکه پیشنهادی حداقل مربعات گسسته (MDLSM)، با روش موجود حداقل مربعات گسسته (DLSM) مقایسه شده است. با توجه به عدم نیاز به محاسبه مشتقات دوم در روش پیشنهادی؛ نتایج بدست آمده کاهش قابل ملاحظه هزینه محاسباتی را در فرآیند تابع تخمین، برای روش پیشنهادی گزارش می کنند.

با حل مثال‌های عددی، مقدار خطای روش پیشنهادی محاسبه شده است. با توجه به میزان خطای گزارش شده (حدود ده تا شش درصد) و مقایسه نتایج روش پیشنهادی با جواب‌های تحلیلی موجود، نشان داده شد که روش ارائه شده از کارایی و دقت مناسبی برای تحلیل امواج خطی، برخوردار است.



شکل (۵) پروفیل موج برای ارتفاع موجی برابر نیم متر، الف) $t=T/20$ (ب) $t=T/5$ (ج) $t=T/2$.

با توجه به اهمیت تحلیل مناسب از پدیده موج، برای طراحی سازه‌های درگیر با موج دریا و کارایی و دقت بالای روش بدون شبکه حداقل مربعات گسسته مختلط برای حل معادلات حاکم بر امواج خطی توسعه داده شده است.

- Numerical Methods in Engineering"; Vol.37, pp.229-256, 1994.
- [4] Atluri, S. N., Liu, H.T., Han Z.D., "Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Mixed Collocation Method for Elasticity Problems", CMES; Vol.14, No.3, pp.141-152, 2006.
- [5] Arzani, H., Afshar, M.H., "Solving Poisson's Equations by the Discrete Least Square Meshless Method", WIT Transactions on Modeling and Simulation, Vol.42, pp.23-32, 2005.
- [6] Shobeyri, G., Afshar, M., "Simulating Free Surface Problems using Discrete Least Squares Meshless Method", Computers & Fluids, Vol.39, No.3, pp.461-470, 2010.
- [7] Afshar M., Amani, J., Naisipour, M., "A node Enrichment Adaptive Refinement in Discrete Least Squares Meshless Method for Solution of Elasticity Problems", Engineering Analysis with Boundary Elements, Vol.36, No.3, pp.385-393, 2012.
- [8] Amani, J., Afshar, M., Naisipour, M., "Mixed Discrete Least Squares Meshless Method for Planar Elasticity Problems using Regular and Irregular Nodal Distributions", Engineering Analysis with Boundary Elements, Vol.36, No.5, pp.894-902, 2012.
- [9] Faraji, S., Afshar, M., "Mixed Discrete Least Square Meshless Method for Solution of Quadratic Partial Differential Equations", Scientia Iranica. Transaction A, Civil Engineering, Vol.21, No.3, p.492, 2014.
- [10] Liu, G.R., Gu, Y.T., "An Introduction to Meshfree Methods and their Programming", Springer, 2005.
- [11] Sukumar N., "Construction of Polygonal Interpolants: a Maximum Entropy Approach", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.61, No.12, pp.2159-2181, 2004.
- [12] Sukumar, N., Huang, Z., Prévost, J. H., Suo, Z., "Partition of Unity Enrichment for Bimaterial Interface Cracks", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.59, No.8, pp.1075-1102, 2004.
- [13] Gu, L., "Moving Kriging Interpolation and Element Free Galerkin Method", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.56, No.1, pp.1-11, 2003.
- [14] Lancaster, P., Salkauskas, K., "Surfaces Generated by Moving Least Squares Methods", Mathematics of Computation, Vol.37, No.155, pp.141-158, 1981.

فهرست نمادها

X	مختصات
P	تابع پایه
c	ضریب تابع پایه
w _j	تابع وزن
dw _j	شعاع ناحیه تاثیر
X _j	مرکز ناحیه تاثیر
A	تابع تخمین (تابع شکل)
φ	تابع جواب تخمینی
φ̄	بردار جوابهای گرهی
α	ضریب پناستی
R _Ω	باقیمانده معادله دیفرانسیلی
R _Γ	باقیمانده شرایط مرزی
ψ	تابع جریان
u	بردار سرعت در جهت افقی
w	بردار سرعت در جهت عمودی
L	طول موج
H	ارتفاع موج
h	عمق آب
σ	فرکانس موج
k	عدد موج
g	شتاب ثقل
T	پریود موج
η	تابع ارتفاع موج
φ	تابع پتانسیل

۶- منابع

- [1] Gingold, R.A., Monaghan, J.J., "Smoothed Particle Hydrodynamics: Theory and Applications to Non-Spherical Stars", Mon Not R Astron Soc; Vol.18, pp.375-89, 1977.
- [2] Koshizuka, S., Nobe, A., Oka, Y., "Numerical Analysis of Breaking Waves using the Moving Particle Semi-implicit Method Analysis", International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol.26, pp.751-769, 1998.
- [3] Belytschko, T., Lu, Y.Y., Gu, L. "Element-Free Galerkin Methods", International Journal for