

## پاسخ غیرخطی الکترو-مگنتو-ترمو-الاستیک کره نانو کامپوزیتی هوشمند ساخته شده از پلیمر تقویت شده پیزوالکتریک با در نظر گرفتن تاثیر درصد حجمی نانولوله چند جداره کربنی

عباس لقمان<sup>۱</sup>، حسین تورنگ<sup>۲</sup>، مهرداد اعظمی<sup>۲</sup>

h\_tourang@yahoo.com

۱- دانشیار دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه کاشان

۲- دانشجوی دکتری دانشکده مهندسی مکانیک دانشگاه کاشان

### چکیده

در این مقاله یک حل غیرخطی برای پاسخ الکترو-مگنتو-ترمو-الاستیک کره هوشمند ساخته شده از ماده پلیمری پیزوالکتریک تقویت شده با نانولوله‌های چند جداره کربنی در سه درصد حجمی مختلف بررسی شده است. کره تحت فشار داخلی و خارجی، یک گرادیان دما، یک میدان مغناطیسی و یک اختلاف پتانسیل الکتریکی قرار داده شده است. با استفاده از معادله تعادل، سازگاری، معادله الکترو-دینامیک ماکسول، کوپلینگ الکترومکانیکی و معادلات پتانسیل الکتریکی برای شارژ الکتریکی و روابط تنش کرنش یک معادله دیفرانسیل غیرخطی شامل جابجایی شعاعی برای مخزن کروی بدست آمده است. می‌توان نتیجه‌گیری کرد که با درصد حجمی مناسب از نانولوله‌های چند جداره کربنی مقاومت مخزن تحت فشار نانو کامپوزیتی افزایش یافته است. همچنین با اعمال یک اختلاف پتانسیل الکتریکی و میدان مغناطیسی مناسب تغییر شکل مخزن کروی را می‌توان کنترل نمود و با توجه به خصوصیات فیزیکی و مکانیکی مناسب از قبیل وزن کم و استحکام قابل قبول و کنترل پذیری برای استفاده در مخازن دریایی پیشنهاد می‌شود.

واژگان کلیدی: پلیمر پیزوالکتریک، الکترو-مگنتو-ترمو-الاستیک غیر خطی، کره جدار ضخیم، نانو کامپوزیت هوشمند.

تاریخ دریافت مقاله : ۹۴/۱۲/۰۶

تاریخ پذیرش مقاله : ۹۵/۰۵/۲۷

## ۱- مقدمه

امروزه استفاده از مواد پلیمری پیزوالکتریک در سازه‌های هوشمند قابل توجه است و تجزیه و تحلیل چنین سازه‌هایی مورد توجه محققین در سال‌های اخیر قرار گرفته است. محققین همواره به دنبال موادی هستند که بتوانند خواص آن‌ها را وابسته به شرایط موجود بهینه نمایند، در دو دهه گذشته مواد پیزوالکتریک ساختار یافته منظم موضوع تحقیقات بسیاری بوده است. پلیمرهای پیزوالکتریک را می‌توان با تزریق در داخل قالب تولید نمود و امکان جوشکاری بر روی آن‌ها به سادگی وجود دارد و اغلب در صنایع پزشکی، خودرو، دریایی، فضایی و نظامی استفاده می‌گردند. بخصوص از این مواد می‌توان به عنوان مخزن ذخیره سازی در صنایع دریایی در بنادر و کشتیرانی استفاده نمود. مواد پیزوالکتریک زمانی که تحت یک میدان الکتریکی قرار گیرند تغییر شکل می‌دهند. از این خاصیت آن‌ها می‌توان برای ساخت عملگر استفاده نمود. بنابراین این امکان وجود دارد تا برای کنترل مقدار تغییر شکل و افزایش طول عمر سازه از این خاصیت آن‌ها استفاده نمود. همچنین مواد پیزوالکتریک در اثر اعمال تغییر شکل اختلاف پتانسیل الکتریکی تولید می‌کنند که از این خاصیت می‌توان به عنوان حسگر استفاده نمود. در بسیاری از کاربردها این مواد در معرض تغییرات دمایی مختلف قرار می‌گیرند. همین‌طور امکان استفاده از آن‌ها در محیط‌هایی با میدان‌های مغناطیسی مختلف وجود دارد و بسته به اینکه به عنوان عملگر یا حسگر مورد استفاده قرار گیرند ممکن است اختلاف پتانسیل الکتریکی به آن‌ها اعمال یا از آن‌ها به عنوان خروجی گرفته شود. چنین ترکیبی از بارگذاری تنش‌های الکتریکی حرارتی مغناطیسی را ایجاد می‌کند. تمام خواص مکانیکی پلیمر پیزوالکتریک نیز با دما و تنش به صورت غیر خطی تغییر می‌کنند.

با توجه به خصوصیات مناسب نانولوله‌های کربنی استفاده از آن‌ها به عنوان تقویت کننده مواد پلیمری مورد توجه محققان بوده است. همچنین در خصوص تحلیل تنش تحت بارگذاری های متفاوت بر روی مواد پیزوالکتریک و کامپوزیت‌های ساخته شده از فازهای متفاوت مطالعاتی انجام گرفته است. ونگ و زونگ (۲۰۰۳) یک پوسته‌ی استوانه‌ای از جنس کامپوزیت پیزوالکتریک تحت بارگذاری فشاری و حرارتی را بررسی کرده و از قانون توانی و سری فوریه در تحلیل خود استفاده کردند [۱]. اسلامی و همکارانش (۲۰۰۵) تنش‌های

مکانیکی و حرارتی را در یک کره جدار ضخیم از جنس ماده مدرج تابعی بررسی نمودند [۲]. مویسالا و همکارانش (۲۰۰۶) تاثیر رسانایی حرارتی و الکتریکی نانولوله کربنی تک جداره و چند جداره در زمینه‌ی کامپوزیت اپوکسی را بررسی کرده و نشان دادند که رسانایی حرارتی و الکتریکی کامپوزیت تقویت شده با نانولوله کربنی چند جداره بیشتر از تک جداره است [۳]. شیدل و لاگوداس (۲۰۰۶) تحلیل میکرومکانیکی تاثیر خواص الاستیکی نانولوله کربنی در زمینه کامپوزیت را مورد بررسی قرار داده و از روش موری تاناکا برای بدست آوردن ضرایب الاستیک استفاده کردند [۴]. صالحی خوجین و جلیلی (۲۰۰۷) تحلیل تنش کامپوزیت پلیمری از جنس پیزوالکتریک تقویت شده با نانولوله کربنی تک جداره تحت بار الکترومکانیک را بررسی کرده‌اند و هدفشان به دست آوردن جایابی بین نانولوله و ماتریس و تنش برشی تحت بارگذاری الکترومکانیک بود که این کار را با استفاده از تابع پتانسیل لنارد جونز انجام دادند و به این نتیجه رسیدند که با افزایش بار الکتریکی فاصله‌ی بین نانولوله و پلیمر افزایش می‌یابد [۵]. کنگ و همکارانش (۲۰۰۹) تنش‌های ترمو-مغناطیسی و توزیع میدان مغناطیسی بر روی یک سیلندر غیر همگن را مورد بررسی قرار دادند [۶]. ونگ و همکارانش (۲۰۰۹) تاثیر میدان مغناطیسی طولی روی انتشار موج در نانو لوله‌های کربنی جاسازی شده در ماتریس الاستیک را بررسی کردند. معادلات به صورت دینامیک حل شده و اثر میدان مغناطیسی را به صورت نیروی لورنتز در معادلات تعادل اعمال کردند. آن‌ها نشان دادند که سرعت انتشار موج در نانو لوله با افزایش میدان مغناطیسی طولی افزایش می‌یابد [۷]. اکبری آلاشتی و همکارانش (۲۰۱۲) تحلیل ترموالاستیک پوسته کروی را در حالتی که مدرج تابعی چیده شده‌اند با لایه‌هایی که خاصیت پیزوالکتریک دارند بررسی کردند [۸]. قربانپور آرانی و همکارانش (۲۰۱۲) تحلیل الکتروترمو مکانیکی کره تابعی مدرج پیزوالکتریک را به روش عددی و به کمک نرم افزار انسیس انجام دادند [۹]. در این تحقیق یک کره جدار ضخیم کامپوزیتی پایه پلیمری تقویت شده با نانولوله کربنی چند جداره با سه نوع درصد حجمی مختلف، تحت میدان‌های حرارتی، مغناطیسی، الکتریکی و مکانیکی مورد تحلیل و بررسی قرار می‌گیرد. اگر چه بررسی بر هم‌کنش کوپل مگنتو-ترمو-الکترو-مکانیک در سازه های پیزوالکتریک همگن تحت بر هم‌کنش استاتیک بین میدان‌های

جمواد پلیمری حتی در دمای اتاق نیز تغییر شکل‌های نسبتاً بزرگی در اثر بار مکانیکی دارند که با بالا رفتن دما این تغییر شکل‌ها به صورت غیرخطی افزایش می‌یابند [۱۰] و [۱۱]. برای خصوصیات الکتریکی و حرارتی پلیمر پیزوالکتریک به‌منظور استفاده در محاسبات عددی از تحقیق انجام شده توسط قربانپور آرانی و همکاران [۱۲] استفاده شده است و در نهایت برای محاسبه ضرایب مورد نظر در نانوکامپوزیت از روش ترکیب استفاده شده است. در این روش فرض می‌شود که نانولوله‌ها به‌صورت الیاف‌های کوتاه و منظم در ماتریس پراکنده شده‌اند و به همین اساس خواص نانوکامپوزیت از روش ترکیب به‌دست می‌آید. فرمولهای زیر نحوه محاسبه ضرایب الکتریکی، مغناطیسی و حرارتی نانو کامپوزیت را به روش ترکیب نشان می‌دهند [۱۳] و [۱۴].

$$e_{ij} = V_{cn} e_{ij}^{cn} + V_m e_{ij}^m \quad (۱)$$

$$\epsilon_{ij} = V_{cn} \epsilon_{ij}^{cn} + V_m \epsilon_{ij}^m \quad (۲)$$

$$\nu = V_{cn} \nu^{cn} + V_m \nu^m \quad (۳)$$

$$\alpha_r = V_{cn} \alpha_r^{cn} + V_m \alpha_r^m \quad (۴)$$

$$\mu_{ij} = V_{cn} \mu_{ij}^{cn} + V_m \mu_{ij}^m \quad (۵)$$

$$\alpha_\theta = V_{cn} \alpha_\theta^{cn} + V_m \alpha_\theta^m \quad (۶)$$

در روابط بالا  $\alpha_\theta^{cn}, \alpha_r^{cn}, \nu^{cn}, \mu_{ij}^{cn}, e_{ij}^{cn}, \epsilon_{ij}^{cn}$  به ترتیب ثابت دی‌الکتریک، ضرایب پیزوالکتریک، ضریب نفوذ پذیری مغناطیسی، نسبت پواسون<sup>۲</sup> و ضرایب انبساط حرارتی شعاعی و مماسی نانو لوله می‌باشند.

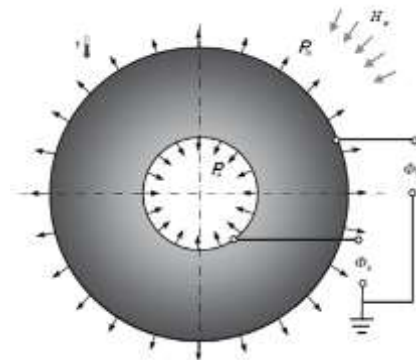
همچنین  $\alpha_\theta^m, \alpha_r^m, \nu^m, \mu_{ij}^m, e_{ij}^m, \epsilon_{ij}^m$  ضرایب مربوط به ماتریس هستند.  $\alpha_\theta, \alpha_r, \nu, \mu_{ij}, e_{ij}, \epsilon_{ij}$  ضرایب مربوط به نانو کامپوزیت می‌باشند.  $V_m$  و  $V_{cn}$  درصدهای حجمی نانو لوله و ماتریس در کامپوزیت هستند.

در این پژوهش اثر بارهای الکتریکی-مکانیکی، حرارتی-الکتریکی-مکانیکی، مغناطیسی-الکتریکی-مکانیکی و کوپل هم زمان این میدان‌ها یعنی بارگذاری حرارتی-مغناطیسی-الکتریکی-مکانیکی در کره کامپوزیتی که توسط نانو لوله تقویت شده است، بررسی می‌شود. اثرات نانو لوله در زمینه به صورت درصد های حجمی متفاوت تزریق نانو لوله در ماده پلیمر مورد بررسی قرار می‌گیرد. خواص نانو کامپوزیت با استفاده از روش ترکیب که شرح داده شده بدست می‌آید که ضرایب مربوط به نانو لوله از مرجع [۱۲] و ضرایب پلیمر PVDF از مراجع [۵] و [۱۵] استخراج می‌شوند. برای

مغناطیسی، حرارتی، الکتریکی و مکانیکی و برهم‌کنش ناپایا بین میدان‌های مختلف در گذشته مورد مطالعه قرار گرفته است. اما هیچ یک از آن‌ها به بررسی رفتار کره پلیمری تقویت شده با نانو لوله کربنی تحت میدان‌های ذکر شده‌ی فوق نپرداخته‌اند.

## ۲- هندسه، نوع بارگذاری و خصوصیات ماده

یک مخزن کروی جدار ضخیم با ضخامت ثابت  $h$ ، شعاع داخلی  $a$ ، شعاع خارجی  $b$  و نسبت شعاع  $b/a = 2$  در نظر گرفته شده است که مشخصات هندسی در جدول (۱) آورده شده است. کره تحت فشار داخلی  $P_a$  و فشار خارجی  $P_b$  قرار دارد، همچنین یک اختلاف پتانسیل الکتریکی بین سطح داخلی و خارجی اعمال شده است. پتانسیل الکتریکی داخل  $\phi_a$  و پتانسیل الکتریکی خارجی  $\phi_b$  می‌باشد. توزیع دما به صورت انتقال حرارت پایدار با دمای سطح داخلی  $T_a$  و سطح خارجی  $T_b$  است. میدان مغناطیسی یکنواخت  $H_\phi$  نیز در حال اعمال به تمام کره به صورت متقارن و همگن می‌باشد. در شکل (۱) مخزن کروی تحت بارگذاری الکترو-مگنتو-ترمو-الاستیک با شرایط مرزی ذکر شده نشان داده شده است. نس مخزن کروی مطالعه شده در این تحقیق پلیمر پیزوالکتریک<sup>۱</sup> می‌باشد. یکی از مشکلاتی که در استفاده از این مواد در بسیاری از کاربردها وجود دارد ضعف آن‌ها در بارگذاری همزمان حرارتی و مکانیکی می‌باشد.



شکل (۱) نمایی از کره تحت بارگذاری الکتریکی، مغناطیسی، حرارتی و فشار داخلی و خارجی.

جدول (۱) مشخصات هندسی کره.

شعاع داخلی (m) a	شعاع خارجی (m) b	ضخامت کره (m) h
۰.۵	۱	۰.۵

<sup>۲</sup> Poisson's Ratio

<sup>۱</sup> Piezoelectric

$$\zeta = -\frac{1}{S_0} \ln \frac{E}{E_{m1}}$$

$$\kappa_1 = \ln \left( \frac{E_{m1}}{E_{m2}} \right) / \ln \left( \frac{T_{ambient}}{T_2} \right)$$

$$\chi_1 = E_{m1} / T_{ambient}^{K_1} \quad (9)$$

$$\kappa_2 = \ln(E_{m3} / \chi_1 T_2^{K_1} e^{\zeta S_0}) / \ln(T_3 / T_2)$$

$$\chi_2 = \frac{E_3}{T_3^{K_2} e^{\zeta S_0}}$$

### ۳- مدل ریاضی و معادلات حاکم

هنگامی که سازه‌های ساخته شده از مواد پیزوالکتریک در بارگذاری الکترومکانیکی قرار می‌گیرند معادله ساختاری کوپلینگ الکترومکانیکی در یک ماده همگن پیزوالکتریک بر اساس پیزوالاستیسیته<sup>۴</sup> به این صورت بیان می‌گردد [۱۷]:

$$\sigma = C : \varepsilon - e : E \quad (10)$$

$$D = e : \varepsilon + \varepsilon : E \quad (11)$$

در این معادلات  $\varepsilon$ ,  $\sigma$ ,  $E$  و  $D$  به ترتیب تانسورهای کرنش، تنش، میدان الکتریکی و جابجایی الکتریکی می‌باشند. همچنین  $C$ ,  $e$  و  $\varepsilon$  به ترتیب تانسور مرتبه چهارم الاستیسیته، تانسور مرتبه سوم ضرایب پیزوالکتریک و تانسور گذردهی دی‌الکتریک می‌باشند.

معادله تعادل برای کره پیزوالکتریک [۱۸] و معادله ماکسول برای شارژ الکترواستاتیک آزاد در سیستم مختصات کروی عبارت‌اند از [۱۹]:

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{2(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})}{r} + f_{\varphi\varphi} = 0 \quad (12)$$

$$\frac{\partial D_{rr}}{\partial r} + \frac{2}{r} D_{rr} = 0 \quad (13)$$

روابط بین کرنش‌ها و جابجایی شعاعی و رابطه بین میدان الکتریکی و پتانسیل الکتریکی برای مسئله تعریف شده به این صورت بیان می‌گردند [۲۰]:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{du}{dr}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u}{r}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u}{r}, \quad E_{rr} = -\frac{d\phi}{dr} \quad (14)$$

در این معادلات  $r$  شعاع (m) و  $\sigma_{rr}$  تنش شعاعی و  $\sigma_{\theta\theta}$  تنش مماسی و  $D_{rr}$  جابجایی الکتریکی شعاعی و  $\varepsilon_{rr}$  کرنش شعاعی و  $\varepsilon_{\theta\theta}$ ,  $\varepsilon_{\varphi\varphi}$  کرنشهای مماسی و  $u(r)$  جابجایی شعاعی هستند. همچنین نیروی لورنتس<sup>۵</sup> می‌باشد که

محاسبه مدول الاستیسیته غیر خطی از پارامتر مدول الاستیسیته ماکسول در رابطه برگر استفاده می‌شود. رابطه برگر عبارت است از [۱۶]:

$$\varepsilon_B = \frac{\sigma}{E_M} + \frac{\sigma}{E_K} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) + \frac{\sigma}{\eta_M} t, \quad \tau = \frac{\eta_K}{E_K} \quad (7)$$

در رابطه (۷)  $E_M$  و  $\eta_M$  مدول فنر و ویسکوزیته میراگر ماکسول<sup>۱</sup>،  $E_K$  و  $\eta_K$  مدول فنر و ویسکوزیته میراگر کلونین<sup>۲</sup> می‌باشند.

بخش اول رابطه مقدار ثابتی است که تغییر شکل الاستیک لحظه‌ای نامیده می‌شود. ضرایب رابطه برگر<sup>۳</sup> از طریق انجام آزمایش‌های متعدد محاسبه می‌شوند. ضرایب رابطه برگر برای پلیمر پیزوالکتریک تقویت شده با نانولوله‌های چند جداره کربنی در دماها و تنشهای مختلف توسط تانگ و همکاران ارائه شده است [۱۶].

در این تحقیق از بخش اول رابطه برگر برای محاسبه مدول الاستیسیته استفاده می‌شود که این ضرایب با استفاده از رگرسیون غیرخطی برای تنش‌ها و دماهای مختلف محاسبه می‌شوند. در این روش ابتدا با توجه به مقدار  $E_M$  در دمای ۲۳ درجه سانتیگراد و تنشهای مختلف، یک تابع اولیه برای تغییرات آن در دمای ۵۰ و ۸۰ درجه سانتیگراد حدس زده شده است و با انطباق مقادیر این ضریب در تنش ۱۵ مگاپاسکال و دماهای ۵۰ و ۸۰ درجه سانتیگراد توابع توزیع این ضرایب برحسب تنش در دماهای ۵۰ و ۸۰ درجه سانتیگراد محاسبه می‌شوند. سپس با توجه به توزیع این ضرایب در تنش ۱۵ مگاپاسکال و دماهای مختلف توابع تغییر این ضرایب با دما تعیین می‌شوند. با توجه به روش توضیح داده شده تابع تغییرات مدول الاستیسیته ماکسول عبارت- است از:

$$E_m(T, \sigma) = \begin{cases} (\chi_1 T^{K_1}) e^{\zeta \sigma} & T \leq 50^\circ C \\ (\chi_2 T^{K_2}) e^{\zeta \sigma} & T \geq 50^\circ C \end{cases} \quad (8)$$

با استفاده از رگرسیون غیرخطی انجام شده اگر مقدار  $E_m$  در تنش  $S_0$  و دماهای  $T = T_{ambient}, T_2, T_3$  به ترتیب برابر  $E_{m3}, E_{m2}, E_{m1}$  و مدول الاستیسیته ماده در دمای محیط برابر  $E$  باشد ضرایب  $\chi_1, \kappa_1, \zeta, \chi_2, \kappa_2$  عبارت‌اند از:

<sup>4</sup> Piezo Elasticity

<sup>5</sup> Lorentz Force

<sup>1</sup> Maxwell

<sup>2</sup> Kelvin

<sup>3</sup> Berger

$$\lambda = \frac{Ev}{(1+\nu)(1-2\nu)}, C_{11} = C_{22} = C_{33} = \lambda \quad (20)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad (21)$$

$C_{12} = C_{21} = C_{31} = C_{13} = C_{23} = C_{32} = \mu$   
که  $E$  (N/m<sup>2</sup>) مدول الاستیسیته و  $\nu$  نسبت پواسون است.

#### ۴- بدون بعدسازی معادلات

معمولا فرم مرسوم برای بی بعد سازی مقادیر فوق به این شرح می باشد [۲۰]:

$$\xi = \frac{r}{b}, u = \frac{u}{b}, \sigma_r = \frac{\sigma_r}{\sigma_y}, \sigma_\theta = \sigma_\theta = \frac{\sigma_{\theta\theta}}{\sigma_y}, E = \frac{E}{\sigma_y} \quad (22)$$

$$\alpha_i = \alpha_i T_\infty, f_\phi = \frac{f_{\phi\phi}}{\sigma_y} b, C_{ij} = \frac{C_{ij}}{\sigma_y}, P_i = \frac{P_a}{\sigma_y}, P_o = \frac{P_b}{\sigma_y}$$

$$\tilde{e}_{ij} = \frac{e_{ij}}{\sqrt{\sigma_y \epsilon_{11}}}, \Lambda_r = \frac{D_r}{\sqrt{\sigma_y \epsilon_{11}}}, \Psi(\xi) = \frac{T(\xi) - T_\infty}{T_\infty}$$

$$\phi_0 = b \sqrt{\frac{\sigma_y}{\epsilon_{11}}}, \Gamma = \sqrt{\frac{\epsilon_{11}}{\sigma_y}} \frac{\phi}{b}, E_i = \frac{e_{li}}{\sqrt{\sigma_y \epsilon_{11}}} (i, j = 1, 2, 3)$$

در این معادلات  $\Gamma, \Lambda_r, \Psi$  و  $\phi(r)$  به ترتیب پتانسیل الکتریکی بدون بعد، جابجایی الکتریکی بدون بعد، دمای بدون بعد و پتانسیل الکتریکی (W/A) هستند.

استفاده از صورت های بی بعد شده فوق و استفاده از آن ها در معادلات (۱۲)، (۱۳)، (۱۷) و (۱۸) معادلات بدون بعد به این شرح بدست می آیند:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial \xi} + \frac{2(\sigma_r - \sigma_\theta)}{\xi} + f_\phi = 0 \quad (23)$$

$$\frac{\partial \Lambda_r}{\partial \xi} + \frac{2\Lambda_r}{\xi} = 0 \quad (24)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_\phi \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{rr} \\ \epsilon_{\theta\theta} \\ \epsilon_{\phi\phi} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \alpha_r \\ \alpha_\theta \\ \alpha_\phi \end{Bmatrix} \Psi(\xi) \quad (25)$$

$$+ \begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{Bmatrix} \left\{ \frac{\partial \Gamma}{\partial \xi} \right\}$$

$$\{\Lambda_r\} = [E_1 \ E_2 \ E_3] \begin{Bmatrix} \epsilon_{rr} \\ \epsilon_{\theta\theta} \\ \epsilon_{\phi\phi} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \alpha_r \\ \alpha_\theta \\ \alpha_\phi \end{Bmatrix} \Psi(\xi) - \left\{ \frac{\partial \Gamma}{\partial \xi} \right\} \quad (27)$$

#### ۵- معادله انتقال حرارت و حل آن

معادله انتقال حرارت شرایط پایدار در مختصات کروی برای مسئله یک بعدی در جهت شعاع با شرایط مرزی حرارتی برای پلیمر پیزوالکتریک کروی توخالی بدین صورت بیان می شود:

همان نیروی مغناطیسی به عنوان یک نیروی خارجی است و به این صورت محاسبه می شود [۲۱]:

$$\vec{U} = (u, 0, 0), \quad \vec{h} = (0, 0, h_\phi)$$

$$\vec{e} = -\mu(0, H_\phi \frac{\partial u_r}{\partial t}, 0)$$

$$\vec{J} = (0, -\frac{\partial h_\phi}{\partial r}, 0) \quad (15)$$

$$h_\phi = -H_\phi (\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r})$$

در معادلات بالا  $\vec{J}$  چگالی جریان،  $\vec{e}$  بردار اختلاف میدان الکتریسیته،  $\vec{h}$  بردار اغتشاش میدان مغناطیسی،  $\vec{U}$  بردار جابجایی و  $\vec{H} = (0, 0, H_\phi)$  میدان مغناطیسی اولیه در مختصات کروی  $(r, \theta, \phi)$  می باشد. تاثیر میدان مغناطیسی به صورت نیروی لورنتس در معادلات حرکت ظاهر می شود [۲۱].

$$f_{\phi\phi} = \mu(\vec{J} \times \vec{H}) = \mu H_\phi^2 \frac{\partial}{\partial r} (\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r}) \quad (16)$$

میدان مغناطیسی در راستای طول سیلندر و با فرض ضریب نفوذ پذیری مغناطیسی  $\mu$ ، و بردار اغتشاش میدان مغناطیسی بر اساس معادلات ماکسول<sup>۱</sup> بیان می شود.

معادله ساختاری تنش، کرنش، تنش حرارتی، میدان الکتریکی و اجزای بردار جابجایی الکتریکی شعاعی برای کره نانوکامپوزیتی قطبی شده در جهت شعاعی را می توان با استفاده از معادلات (۱۰) و (۱۱) به این صورت نوشت:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{\phi\phi} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{rr} \\ \epsilon_{\theta\theta} \\ \epsilon_{\phi\phi} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \alpha_r \\ \alpha_\theta \\ \alpha_\phi \end{Bmatrix} T(r) - \begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{12} \\ e_{13} \end{bmatrix} \{E_{rr}\} \quad (17)$$

$$\{D_r\} = [e_{11} \ e_{12} \ e_{13}] \begin{Bmatrix} \epsilon_{rr} \\ \epsilon_{\theta\theta} \\ \epsilon_{\phi\phi} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \alpha_r \\ \alpha_\theta \\ \alpha_\phi \end{Bmatrix} T(r) \quad (18)$$

$$+ [\epsilon_{11}] \{E_{rr}\} \quad (19)$$

$$e_{12} = e_{13}$$

که  $e_{11}, e_{12}, e_{13}, e_{33}$  ضرایب پیزوالکتریک و  $\alpha_r, \alpha_\theta$  ضرایب انبساط حرارتی می باشند. با توجه به رفتار ایزوتروپیک<sup>۲</sup> ماده پیزوالکتریک ضرایب الاستیسیته به این صورت محاسبه می شوند [۲۱].

<sup>2</sup> Isotropic

<sup>1</sup> Maxwell Equations

$$\frac{\partial^2 u(\xi, t)}{\partial \xi^2} + Z_1(\xi, t, \Psi, \sigma_e) \frac{\partial u(\xi, t)}{\partial \xi} + Z_2(\xi, t, \Psi, \sigma_e) \frac{u(\xi, t)}{\xi^2} = Z_3(\xi, t, \Psi, \sigma_e) + Z_4(\xi, t, \Psi, \sigma_e) \quad (34)$$

$$Z_1(\xi, t, \Psi, \sigma_e) = \frac{1}{EM} \left( \frac{dC_{11}}{d\xi} + \frac{2}{\xi} EM \right)$$

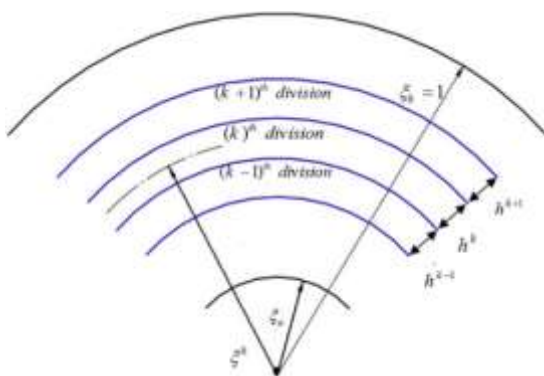
$$Z_2(\xi, t, \Psi, \sigma_e) = \frac{1}{EM} \left( \frac{2}{\xi} \left( \frac{dC_{12}}{d\xi} + \frac{1}{\xi} (C_{12} - C_{22}) \right) - \frac{2C_{12}}{\xi^2} - \frac{4E_2(E_2 - E_1) - 2\mu H^2}{\xi^2} \right)$$

$$Z_3(\xi, t, \Psi, \sigma_e) = \frac{1}{EM} \left( \frac{dq_{13}}{d\xi} + \frac{2}{\xi} (C_{11} - C_{21}) \alpha_r + \frac{2}{\xi} (C_{12} - C_{22}) \alpha_\theta + \frac{2}{\xi} (q_{14} - q_{24}) \Psi(\xi) + (q_{13} + E_1^2 \alpha_r) \frac{d\Psi}{d\xi} \right) \quad (a34)$$

$$Z_4(\xi, t, \Psi, \sigma_e) = \frac{1}{EM} \left( \frac{-2E_2}{\xi^3} \right)$$

#### ۷- حل معادله دیفرانسیل

معادله (۳۴) یک معادله دیفرانسیل غیر خطی است که به دلیل وابستگی ضرایب آن به شعاع، دما و تنش امکان حل دقیق آن وجود ندارد. بنابراین یک روش نیمه تحلیلی برای حل معادله دیفرانسیل مورد استفاده قرار گرفته است. در این روش دامنه شعاع کره به اجزای کوچک زیر دامنه مانند شکل (۲) تقسیم می‌شود. واضح است که افزایش تعداد زیر دامنه‌ها دقت نتایج را بالا می‌برد. پارامترهای  $Z_1, Z_2, Z_3, Z_4$  در معادله (۳۴) برای زیر دامنه  $k^k$  محاسبه شده و به این روش معادله دیفرانسیل غیرخطی (۳۴) به یک معادله دیفرانسیل معمولی با ضرایب ثابت برای آن زیر دامنه تبدیل می‌گردد [۲۲].



شکل (۲) تقسیم‌بندی دامنه شعاعی به تعدادی زیر دامنه مجازی.

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[ r^2 k(r) \frac{dT(r)}{dr} \right] = 0, \quad a \leq r \leq b \quad (28)$$

شرایط مرزی دمایی برای کره توخالی در حالت بدون بعد به این صورت بیان می‌گردد [۲]:

$$\Psi(\xi)|_{\xi=\xi_a} = \Psi(\xi_a), \quad \Psi(\xi)|_{\xi=\xi_b} = \Psi(\xi_b) \quad (29)$$

با حل معادله (۲۸) با شرایط مرزی داده شده در معادله (۲۹) توزیع دمای بدون بعد به صورت معادله (۳۰) بدست می‌آید.

$$\Psi(\xi) = \frac{\Psi(\xi_b) - \Psi(\xi_a)}{\int_{\xi_a}^{\xi_b} \frac{1}{\rho^2 k(\rho)} d\rho} \int_{\xi_a}^{\xi} \frac{1}{\rho^2 k(\rho)} d\rho + \Psi(\xi_a) \quad (30)$$

#### ۶- معادله دیفرانسیل الکترو-مگنتو-ترمو-مکانیک

از حل معادله دیفرانسیل (۲۴) نتیجه می‌شود:

$$\Lambda_r = \frac{\chi_3}{\xi^2} \quad (31)$$

که در این معادله  $\chi_3$  یک ضریب ثابت است. با جایگزینی معادله (۳۱) در معادله (۲۶) و ترکیب با معادله (۲۵) نتیجه می‌شود:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_\phi \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{\phi\phi} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \alpha_r \\ \alpha_\theta \\ \alpha_\phi \end{Bmatrix} \Psi(\xi) + \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} \left[ \begin{bmatrix} E_1 & E_2 & E_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{\phi\phi} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \alpha_r \\ \alpha_\theta \\ \alpha_\phi \end{Bmatrix} \Psi(\xi) - \frac{\chi_3}{\xi^2} \right] \quad (32)$$

در این معادله  $\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{\theta\theta}$  و کرنش‌های الاستیک شعاعی و محیطی هستند و در غالب بدون بعد به این صورت نوشته می‌شوند:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u}{\partial \xi}, \quad \varepsilon_{\phi\phi} = \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u}{\xi}, \quad E_r = -\frac{d\Gamma}{d\xi} a \quad (33)$$

همچنین  $\Psi(\xi)$  توزیع دمای بدون بعد شده است که با استفاده از معادله (۳۰) بدست می‌آید و  $\Gamma(\xi)$  پتانسیل الکتریکی بدون بعد است.

در نهایت با جایگذاری رابطه (۳۱) و (۳۲) در معادله تعادل بدون بعد (۲۳) و جایگذاری رابطه (۳۳) در رابطه (۳۲) با توجه به پارامترهای بی‌بعد سازی رابطه پیوستگی و معادله تعادل به صورت معادله دیفرانسیل (۳۴) زیر ساده می‌شود.

$$\frac{d\Gamma(\xi)}{d\xi} = \chi_1^{(k)}(E_1 m_1^{(k)} + 2E_2 \frac{1}{\xi} e^{m_1^{(k)} \xi} + \chi_2^{(k)}(E_1 m_2^{(k)} + 2E_2 \frac{1}{\xi} e^{m_2^{(k)} \xi} + \chi_3^{(k)} (\frac{Z_4^{(k)}}{Z_2^{(k)}} \frac{2E_2}{\xi^k} - \frac{1}{(\xi^k)^2}) + \frac{2E_2}{\xi^k} (\frac{Z_3^{(k)}}{Z_2^{(k)}}) + (E_1 \alpha_r + 2E_2 \alpha_\theta) \Psi^k \quad (40)$$

بنابراین اختلاف پتانسیل الکتریکی را برای زیر دامنه k ام می توان با انتگرال گرفتن از معادله (۴۰) به این صورت نوشت:

$$\Gamma^{(k)}(\xi) = \chi_1^{(k)}(E_1 e^{m_1^k \xi} + 2E_2 \int \frac{e^{m_1^k \xi}}{\xi} d\xi) + \chi_2^{(k)}(E_1 e^{m_2^k \xi} + 2E_2 \int \frac{e^{m_2^k \xi}}{\xi} d\xi) + \chi_3^{(k)} ((2E_2 \frac{Z_4^{(k)}}{Z_2^{(k)}} + \frac{Z_3^{(k)}}{Z_2^{(k)}}) \text{Ln } \xi + \frac{1}{\xi} + E_1 \frac{Z_4^{(k)}}{Z_2^{(k)}} + \chi_4^{(k)} + E_1 \frac{Z_3^{(k)}}{Z_2^{(k)}} + 2E_2 \frac{Z_3^{(k)}}{Z_2^{(k)}} \text{Ln } \xi - (E_1 \alpha_r + 2E_2 \alpha_\theta) \xi^k \Psi^{(k)}(\xi)) \quad (41)$$

ثابت مجهول  $\chi_j^{(k)}$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ) و  $k = 1, 2, \dots, n$  تعداد تقسیمات شعاع کره)) ضرایب انتگرال برای زیر دامنه k ام می باشند که با اعمال شرایط پیوستگی در دو مرز زیر دامنه و شرایط مرزی کلی مشخص می شوند.

### ۸- شرایط مرزی کلی

شرایط مرزی کلی مکانیکی و الکتریکی به این صورت بیان می شوند:

$$\sigma_r(a) = -P_i, \quad \phi(a) = \phi_a, \quad T(a) = T_a \quad (42)$$

$$\sigma_r(b) = -P_o, \quad \phi(b) = \phi_b, \quad T(b) = T_b$$

شروط پیوستگی جابجایی شعاعی، تنش شعاعی، پتانسیل الکتریکی و مشتق پتانسیل اکتریکی برای هر کدام از تقسیمات شعاع جزئی الزامات شرط پیوستگی می باشند و می توانیم به این صورت بنویسیم:

$$u^k(\xi^k + \frac{h^k}{2}) = u^{k+1}(\xi^{k+1} - \frac{h^{k+1}}{2})$$

$$\sigma_r^{(k)}(\xi^k + \frac{h^k}{2}) = \sigma_r^{(k+1)}(\xi^{k+1} - \frac{h^{k+1}}{2}) \quad (43)$$

$$\Gamma^{(k)}(\xi^k + \frac{h^k}{2}) = \Gamma^{(k+1)}(\xi^{k+1} - \frac{h^{k+1}}{2})$$

$$\frac{d\Gamma^{(k)}}{d\xi}(\xi^k + \frac{h^k}{2}) = \frac{d\Gamma^{(k+1)}}{d\xi}(\xi^{k+1} - \frac{h^{k+1}}{2})$$

شرایط مرزی کلی را در حالت بدون بعد که سه شرط دارد را به این صورت بیان می شود:

شرط مرزی مکانیکی برای یک کره توخالی:

$$\sigma_r(\xi_a) = P_a \quad (44)$$

$$\sigma_r(1) = P_b$$

معادله دیفرانسیل برای جزئی k ام شعاع بدون بعد را می توان به این صورت نوشت:

$$\frac{\partial^2 u^k(\xi, t)}{\partial \xi^2} + Z_1^k(\xi, t, \Psi, \sigma_e) \frac{\partial u^k(\xi, t)}{\partial \xi} + Z_2^k(\xi, t, \Psi, \sigma_e) \frac{u^k(\xi, t)}{\xi^2} = Z_3^k(\xi, t, \Psi, \sigma_e) \quad (35)$$

$$+ Z_4^k(\xi, t, \Psi, \sigma_e)$$

$$Z_1^k = \frac{1}{EM^k} \left( \frac{dC_{11}}{d\xi}(\xi^k) + \frac{2}{\xi^k} EM^k \right)$$

$$Z_2^k = \frac{1}{EM^k} \left( \frac{2}{\xi^k} \left( \frac{dC_{12}}{d\xi}(\xi^k) + \frac{1}{\xi^k} \right) - \frac{2C_{12}^k}{(\xi^k)^2} - \frac{4E_2(E_2 - E_1) - 2\mu H^2}{(\xi^k)^2} \right)$$

$$Z_3^k = \frac{1}{EM^k} \left( \frac{dq_{13}}{d\xi}(\xi^k) + \frac{2}{\xi^k} (C_{11}^k - C_{21}^k) \alpha_r + \frac{2}{\xi^k} (C_{12}^k - C_{22}^k) \alpha_\theta + \frac{2}{\xi^k} (q_{14}^k - q_{24}^k) \Psi(\xi^k) + (q_{13}^k + E_1^2 \alpha_r) \frac{d\Psi}{d\xi}(\xi^k) \right)$$

$$Z_4^k = \frac{1}{EM^k} \left( \frac{-2E_2}{(\xi^k)^3} \right) \quad (a35)$$

حل دقیق معادله دیفرانسیل (۳۵) را می توان به صورت جمع حل عمومی و حل خصوصی به این صورت نوشت:

$$u^k(\xi^k, t_i) = (U_g^i)^k + (U_p^i)^k \quad (36)$$

$$(U_g^i)^k = \chi_1^k e^{m_1^{(k)} \xi} + \chi_2^k e^{m_2^{(k)} \xi} \quad (37)$$

$$(U_p^i)^k = \chi_3^k \frac{Z_4^k}{Z_2^k} + \frac{Z_3^k}{Z_2^k}$$

و ریشه های معادله مشخصه را می توان به این صورت نوشت:

$$m_{1,2}^{(k)} = \frac{-Z_1^{(k)} \pm \sqrt{(Z_1^{(k)})^2 - 4Z_2^{(k)} Z_3^{(k)}}}{2} \quad (38)$$

با جایگذاری جابجایی بی بعد شده که از معادله (۳۶) بدست می آید در معادله (۳۲) تنش های شعاعی و محیطی برای زیر دامنه k ام به این صورت نوشته می شوند.

$$\sigma_r^{(k)} = \chi_1^{(k)} (q_{11}^{(k)} m_1^{(k)} + q_{12}^{(k)} \frac{1}{\xi}) e^{m_1^{(k)} \xi} + \chi_2^{(k)} (q_{11}^{(k)} m_2^{(k)} + q_{12}^{(k)} \frac{1}{\xi}) e^{m_2^{(k)} \xi} + \chi_3^{(k)} (q_{17}^{(k)} \frac{q_{12}^{(k)}}{\xi^k} - \frac{E_1}{(\xi^k)^2}) + q_{18}^{(k)} \frac{q_{12}^{(k)}}{\xi^k} - (q_{13}^{(k)} + q_{14}^{(k)}) \Psi^{(k)}$$

$$\sigma_\theta^{(k)} = \chi_1^{(k)} (q_{21}^{(k)} m_1^{(k)} + q_{22}^{(k)} \frac{1}{\xi}) e^{m_1^{(k)} \xi} + \chi_2^{(k)} (q_{21}^{(k)} m_2^{(k)} + q_{22}^{(k)} \frac{1}{\xi}) e^{m_2^{(k)} \xi} + \chi_3^{(k)} (q_{17}^{(k)} \frac{q_{22}^{(k)}}{\xi^k} - \frac{E_2}{(\xi^k)^2}) + q_{18}^{(k)} \frac{q_{22}^{(k)}}{\xi^k} - (q_{23}^{(k)} + q_{24}^{(k)}) \Psi^{(k)} \quad (39)$$

در معادله (۳۹) ضرایب Qii وابسته به خصوصیات ماده می باشند که در پیوست نشان داده شده اند.

معادله دیفرانسیل اختلاف پتانسیل الکتریکی که در زیر دامنه k ام صدق می کند را می توان به صورت این صورت نوشت:

$$\begin{aligned} \sigma_r(\xi_a) &= -0.8, & \sigma_r(1) &= 0 \\ \Gamma_a &= 0, & \Gamma_b &= 2.5, & H_\phi &= 0 \\ T_a &= 50^\circ C, & T_b &= 30^\circ C \end{aligned} \quad (48)$$

حالت ۳: شرایط مرزی الکترو-مگنتو-ترمو-مکانیکی با اعمال اختلاف پتانسیل الکتریکی و اعمال میدان مغناطیسی که در این حالت کره توخالی تحت فشار داخلی و خارجی و اختلاف دمای داخلی و خارجی قرار می‌گیرد و یک اختلاف پتانسیل الکتریکی بین سطح داخل و خارج ایجاد می‌گردد همچنین میدان مغناطیسی  $H_\phi$  به طور یکنواخت اعمال می‌گردد. در این حالت کره پیزوالکتریک به صورت یک عملگر با دو عامل تحریک می‌باشد.

$$\begin{aligned} \sigma_r(\xi_a) &= -0.8, & \sigma_r(1) &= 0 \\ \Gamma_a &= 0, & \Gamma_b &= 2.5, & H_\phi &= 4 \times 10^8 \\ T_a &= 50^\circ C, & T_b &= 30^\circ C \end{aligned} \quad (49)$$

برای هر سه نوع بارگذاری معادلات دیفرانسیل با روش اعمال دیویژن<sup>۱</sup> و در نظر گرفتن تغییرات خصوصیات با توجه به مقدار تنش و دما در آن زیر دامنه حل شده‌اند و سپس جابجایی، تنش‌ها و اختلاف پتانسیل الکتریکی مشخص شده‌اند.

#### ۹- نتایج و جمع‌بندی

نتایج ارائه شده در این مقاله برای سه حالت مختلف بارگذاری ترکیبی ترمو- مکانیکی، الکترو-ترمو-مکانیکی و الکترو-مگنتو-ترمو-مکانیکی آورده شده است.

حالت ۱: فشار داخلی و خارجی به کره اعمال می‌شود بدون اعمال اختلاف پتانسیل الکتریکی و عدم وجود میدان مغناطیسی.

در این نوع بارگذاری کره به بار مکانیکی و جابجایی ایجاد شده در اثر آن واکنش نشان داده و با توجه به خاصیت پیزوالکتریک اختلاف پتانسیل الکتریکی ایجاد می‌گردد که با اندازه گیری و مشخص کردن آن می‌توان وضعیت مخزن را مشخص نمود. در این حالت تمام کره به عنوان یک حسگر عمل می‌کند.

شرایط مرزی دمایی برای هر سه نوع بارگذاری یکسان است. انتقال حرارت پایدار در اثر رسانایی با دمای داخل و خارج کره به ترتیب  $50^\circ C$ ,  $30^\circ C$  می‌باشد. توزیع دمایی که از معادله (۳۰) بدست می‌آید در شکل (۳) نشان داده شده است.

که  $P_a$  و  $P_b$  به ترتیب فشارهای مکانیکی بدون بعد در شعاع داخلی و خارجی مخزن کروی می‌باشند.

شرط مرزی الکتریکی و مغناطیسی برای یک کره توخالی:

$$\begin{aligned} \Gamma(\xi_a) &= \Gamma_a \\ \Gamma(1) &= \Gamma_b \\ \vec{H} &= (0, 0, H_\phi) \end{aligned} \quad (45)$$

که  $\Gamma_a, \Gamma_b$  به ترتیب پتانسیل الکتریکی بدون بعد در شعاع داخلی و خارجی مخزن کروی و  $H_\phi$  میدان مغناطیسی اعمالی می‌باشند.

- شرط مرزی حرارتی برای یک کره توخالی:

$$\begin{aligned} \Psi(\xi_a) &= \Psi_a \\ \Psi(1) &= \Psi_b \end{aligned} \quad (46)$$

که  $\Psi_a, \Psi_b$  به ترتیب دمای بدون بعد در شعاع داخلی و خارجی مخزن کروی می‌باشند.

مجموعه ای از معادلات جبری بر اساس مجهولات  $\chi_j^{(k)}$  که  $k = 1, 2, \dots, n$  و  $j = 1, 2, 3, 4$  (تعداد تقسیمات شعاع کره) بدست می‌آید که با استفاده از شرایط مرزی معادلات (۴۳) در هر زیر دامنه و شرایط مرزی کلی (۴۵) و (۴۶) بدست آمده‌اند.

سه نوع بارگذاری ترکیبی مختلف الکترو-مگنتو-ترمو-مکانیکی به شرح زیر بررسی شده است:

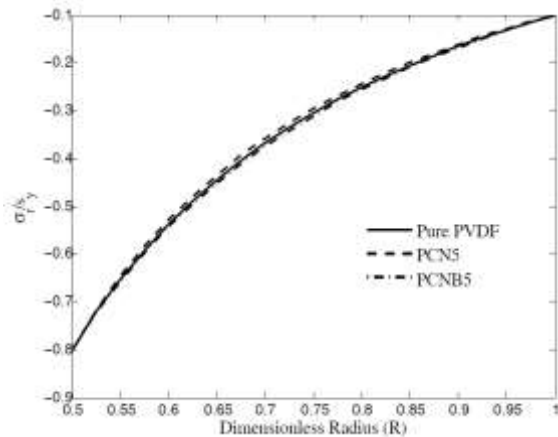
حالت ۱: شرایط مرزی ترمو-مکانیکی بدون اعمال اختلاف پتانسیل الکتریکی و میدان مغناطیسی که در این حالت کره توخالی تحت فشار داخلی و خارجی و اختلاف دمای داخلی و خارجی قرار می‌گیرد که با توجه به جنس پیزوالکتریک مخزن کروی اختلاف پتانسیل الکتریکی بین سطح داخل و خارج با توجه به تغییر شکل ایجاد می‌شود. در این حالت از این خاصیت کره می‌توان به عنوان حسگر استفاده نمود.

$$\begin{aligned} \sigma_r(\xi_a) &= -0.8, & \sigma_r(1) &= 0 \\ \Gamma_a &= 0, & \Gamma_b &= 0, & H_\phi &= 0 \\ T_a &= 50^\circ C, & T_b &= 30^\circ C \end{aligned} \quad (47)$$

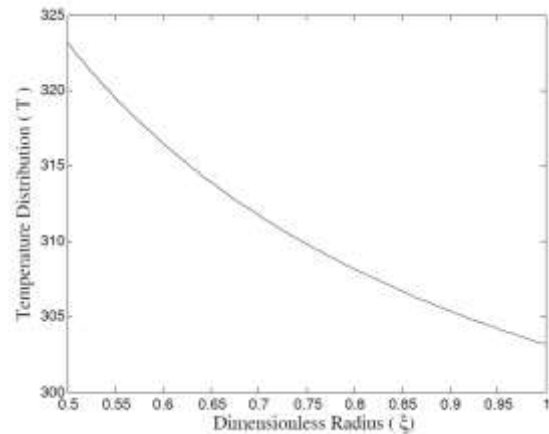
حالت ۲: شرایط مرزی الکترو-ترمو-مکانیکی با اعمال اختلاف پتانسیل الکتریکی و بدون میدان مغناطیسی که در این حالت کره توخالی تحت فشار داخلی و خارجی و اختلاف دمای داخلی و خارجی قرار می‌گیرد و یک اختلاف پتانسیل الکتریکی بین سطح داخل و خارج ایجاد می‌گردد. در این حالت کره پیزوالکتریک به صورت یک عملگر می‌باشد.

<sup>1</sup> Division

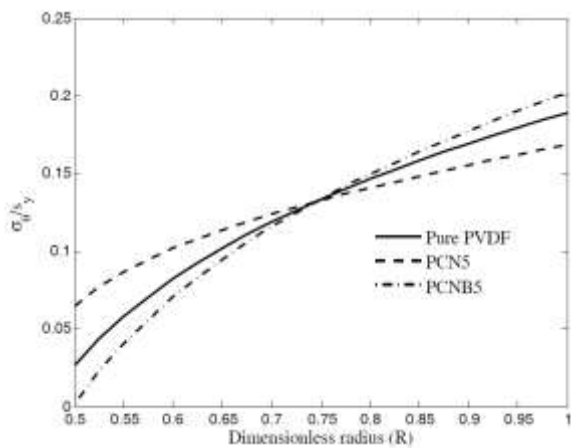




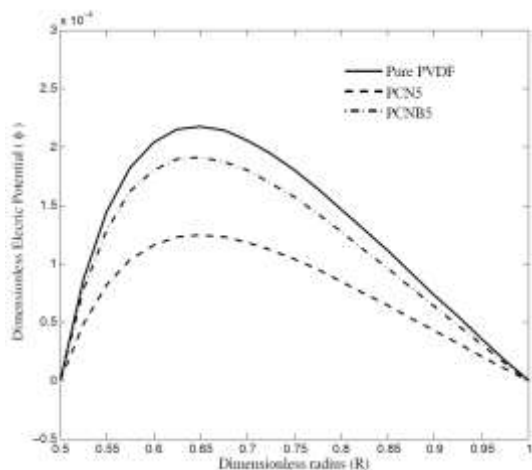
شکل (۴) تنش شعاعی بدون بعد در حالت ۱ بارگذاری برای سه درصد حجمی مختلف نانو کامپوزیت.



شکل (۳) توزیع دما در جهت شعاعی برای تمام حالت‌های بارگذاری.



شکل (۵) تنش شعاعی بدون بعد در حالت ۱ بارگذاری برای سه درصد حجمی مختلف نانو کامپوزیت.

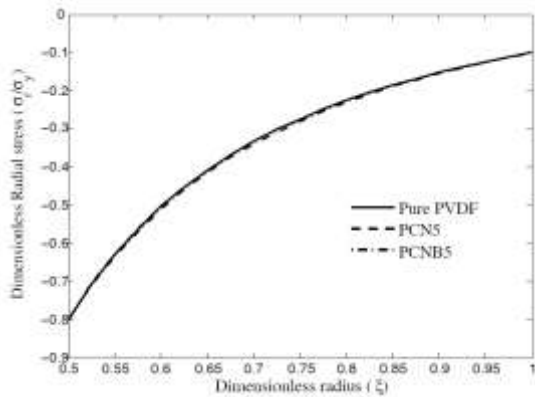


شکل (۶) اختلاف پتانسیل الکتریکی بدون بعد در حالت ۱ بارگذاری برای سه درصد حجمی مختلف نانو کامپوزیت.

از شکل مشخص است که دما در سطح داخل و خارج شرایط مرزی را ارضا می‌کند. تنش شعاعی بدون بعد برای حالت ۱ بارگذاری در شکل (۴) نمایش داده شده است. از شکل مشخص است که در شعاع داخل و خارج همان مقادیر فشار داخلی و خارجی به عنوان تنش شعاعی بدون بعد می‌باشند. نمودار برای سه درصد حجمی مختلف نانو کامپوزیت رسم شده است و آن‌گونه که نمودار نشان می‌دهد تغییرات در صد حجمی تاثیر چندانی بر روی تنش‌های شعاعی ندارد.

تنش محیطی برای حالت ۱ بارگذاری بر اساس سه درصد حجمی مختلف در شکل (۵) نشان داده شده است. از شکل مشخص است که درصد مختلف نانولوله بر روی تنش مماسی تاثیر گذار است بطوری که در PCN5 توزیع یکنواخت تری از PVDF دارد اما در PCNB5 توزیع در ضخامت با تغییرات زیاد همراه است. همچنین تقریباً در شعاع میانه ضخامت کره تنش مماسی برای همه در صدهای حجمی یکسان است. با توجه به اینکه کره از ماده پیزوالکتریک ساخته شده است جابجایی شعاعی که در اثر اعمال بار ترمو-مکانیکی ایجاد می‌شود باعث القای اختلاف پتانسیل الکتریکی در طول شعاع می‌گردد.

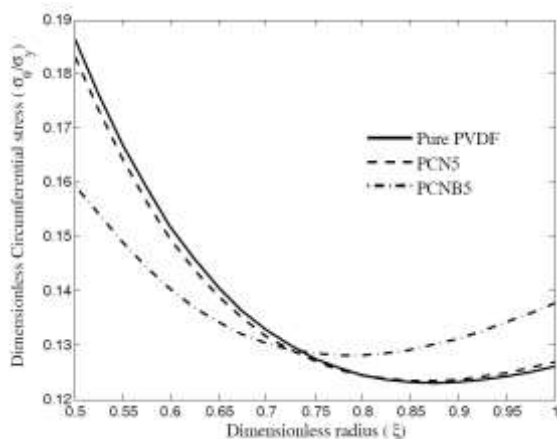
اختلاف پتانسیل الکتریکی بدون بعد برای حالت ۱ بارگذاری و سه درصد حجمی مختلف نانولوله‌ها در پلیمر PVDF در شکل (۶) نشان داده شده است. مشخص است که با افزایش درصد حجمی نانولوله‌های کربنی مقدار اختلاف پتانسیل القا شده کاهش می‌یابد که کاملاً منطقی است و دلیل آن نداشتن خاصیت پیزوالکتریکی نانولوله‌های کربنی است که در زمینه پلیمری که خاصیت پیزوالکتریک دارد افزوده می‌شود.



شکل (۸) تنش شعاعی بدون بعد در حالت ۲ بارگذاری برای سه درصد حجمی مختلف نانو کامپوزیت.

تنش محیطی برای حالت ۲ بارگذاری بر اساس سه درصد حجمی مختلف در شکل (۹) نشان داده شده است. از شکل مشخص است که به دلیل بیشتر بودن خاصیت پیزوالکتریکی PVDF مقدار تنش محیطی در شعاع داخلی برای آن بیشتر از PCN5 است و به همین ترتیب PCNB5 از هر دو توزیع یکنواخت تری دارد.

با توجه به اینکه اختلاف پتانسیل الکتریکی اعمال شده است توزیع پتانسیل الکتریکی بدون بعد در شکل (۱۰) نشان داده شده است و در سطح داخلی و خارجی شرایط مرزی اعمال شده مشخص می‌باشد. با توجه به اینکه این توزیع اجباری می‌باشد برای هر سه درصد توزیع حجمی به صورت یکسان می‌باشد. جابجایی شعاعی بدون بعد برای حالت ۲ بارگذاری بر اساس سه درصد حجمی مختلف در شکل (۱۱) نشان داده شده است. مشخص است که با اضافه شدن درصد نانولوله‌ها تا ۵ درصد باعث کم شدن جابجایی شعاعی مخزن می‌شود.



شکل (۹) تنش شعاعی بدون بعد در حالت ۲ بارگذاری برای سه درصد حجمی مختلف نانو کامپوزیت.

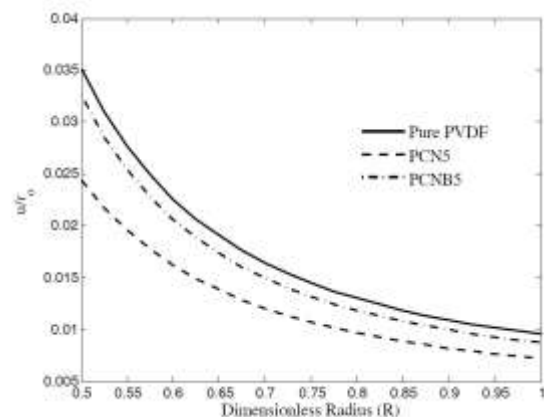
مقدار پتانسیل الکتریکی در سطح داخلی و خارج بر اساس شرایط مرزی صفر می‌باشد. در این حالت می‌توان با اندازه‌گیری پتانسیل الکتریکی در شعاع‌های مختلف مخزن وضعیت تنش و کرنش‌های آن را مشخص نمود. جابجایی شعاعی بدون بعد برای حالت ۱ بارگذاری بر اساس سه درصد حجمی مختلف در شکل (۷) نشان داده شده است.

مشخص است که با اضافه شدن درصد نانولوله‌ها تا ۵ درصد باعث کم شدن جابجایی شعاعی مخزن می‌شود به طوری که حداکثر مقدار جابجایی که در شعاع داخلی روی می‌دهد از مقدار ۰,۰۳۵ به ۰,۰۲۴ کاهش می‌یابد اما با بیشتر شدن درصد حجمی جابجایی بیشتر شده و به ۰,۰۳۲ می‌رسد. لذا در این حالت بارگذاری PCN5 وضعیت بهتری دارد.

حالت ۲: فشار داخلی و خارجی به کره اعمال می‌شود با اعمال اختلاف پتانسیل الکتریکی و عدم وجود میدان مغناطیسی.

در این نوع بارگذاری بر اثر اعمال فشار داخلی جابجایی شعاعی و کرنش شعاعی روی می‌دهد که جابجایی در جهت مثبت می‌باشد و با اعمال اختلاف پتانسیل الکتریکی با توجه به خاصیت پیزوالکتریک مخزن جابجایی در جهت منفی روی می‌دهد که برآیند آن باعث کمتر شدن جابجایی شعاعی کره و کرنش شعاعی می‌شود. در این حالت تمام کره به عنوان یک عملگر می‌باشد.

تنش شعاعی بدون بعد برای حالت ۲ بارگذاری در شکل (۸) نمایش داده شده است. از شکل مشخص است که در شعاع داخلی و خارج همان مقادیر فشار داخلی و خارجی به عنوان تنش شعاعی بدون بعد می‌باشند. نمودار برای سه درصد حجمی مختلف نانو کامپوزیت رسم شده است.



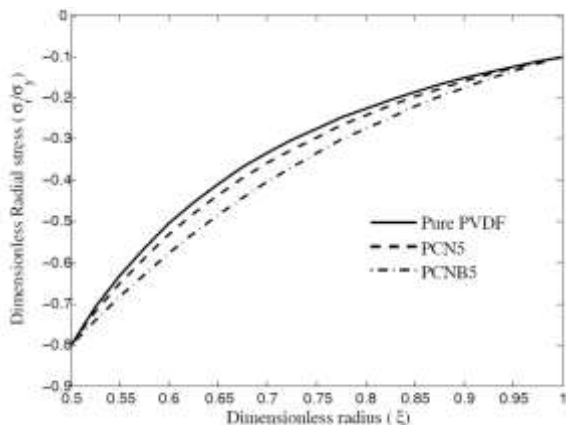
شکل (۷) جابجایی شعاعی بدون بعد در حالت ۱ بارگذاری برای سه درصد حجمی مختلف نانو کامپوزیت.

حالت ۳: فشار داخلی و خارجی به کره اعمال می‌شود به همراه اعمال اختلاف پتانسیل الکتریکی و قرار گرفتن در میدان مغناطیسی.

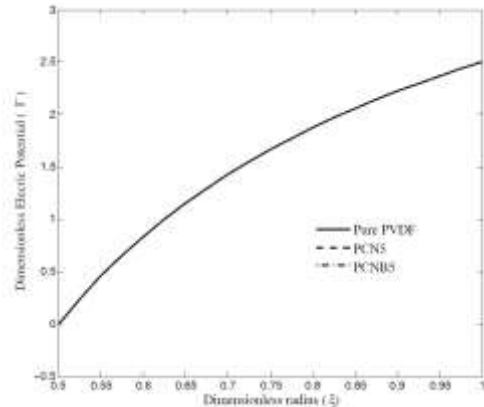
در این نوع بارگذاری کره با اعمال بار الکترو-مگنتو-ترمو-مکانیکی مورد بررسی قرار می‌گیرد و اثر قرار گرفتن در میدان مغناطیسی و تاثیر آن بر تنشها و جابجایی کره علاوه بر بارگذاری های حالت ۲ بررسی می‌شود.

تنش شعاعی بدون بعد برای حالت ۳ بارگذاری در شکل (۱۲) نمایش داده شده است. از شکل مشخص است که در شعاع داخل و خارج همان مقادیر فشار داخلی و خارجی به عنوان تنش شعاعی بدون بعد می‌باشند. نمودار برای سه درصد حجمی مختلف نانو کامپوزیت رسم شده است که شرایط مرزی را ارضاء می‌کند و تاثیر قابل مشاهده ای نسبت به بارگذاری های دیگر دارد.

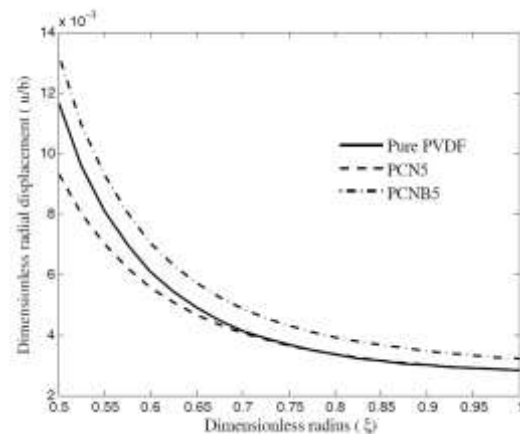
تنش محیطی برای حالت ۳ بارگذاری بر اساس سه درصد حجمی مختلف در شکل (۱۳) نشان داده شده است. با توجه به اینکه میدان مغناطیسی تاثیری روی زمینه پلیمری ندارد و تاثیر آن منحصر به نانولوله می‌باشد لذا تنش مماسی حالت پلیمر خالص در حداقل و کامپوزیت پلیمری با درصد بیشتر در حداکثر مقدار در سرتاسر ضخامت می‌باشد. اختلاف پتانسیل الکتریکی بدون بعد برای حالت ۳ بارگذاری و سه درصد حجمی مختلف نانولوله‌ها در پلیمر PVDF دقیقا مشابه حالت ۲ بارگذاری می‌باشد که در شکل (۱۰) نشان داده شده است. مشخص است که با توجه به اعمال اختلاف پتانسیل خارجی مانند حالت ۲ توزیع اختلاف پتانسیل الکتریکی مانند حالت قبل باشد و مقادیر شرایط مرزی نیز به همان صورت باشد.



شکل (۱۲) تنش شعاعی بدون بعد در حالت ۳ بارگذاری برای سه درصد حجمی مختلف نانو کامپوزیت.



شکل (۱۰) اختلاف پتانسیل الکتریکی بدون بعد در حالت ۲ بارگذاری برای سه درصد حجمی مختلف نانو کامپوزیت.



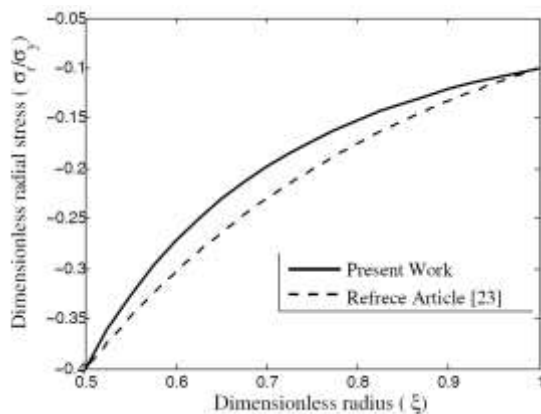
شکل (۱۱) جابجایی شعاعی بدون بعد در حالت ۲ بارگذاری برای سه درصد حجمی مختلف نانو کامپوزیت.

اما با توجه به اعمال پتانسیل الکتریکی و بیشتر بودن خاصیت پیزوالکتریکی PVDF در این حالت وضعیت بهتری نسبت به PCNB5 دارد اما PCN5 در کل وضعیت بهتری دارد با توجه به بالاتر بودن استحکام آن گرچه جابجایی الکتریکی آن کمتر است. با مقایسه شکل (۱۱) با شکل (۷) می‌توان مشاهده نمود که اعمال پتانسیل الکتریکی جابجایی شعاعی را کنترل نموده است و مقدار قابل توجهی کاهش یافته است. به طوری که حداکثر مقدار جابجایی که در شعاع داخلی روی می‌دهد از مقدار ۰,۰۳۵ به ۰,۰۱۱۵ برای PVDF و از ۰,۰۲۴ به ۰,۰۰۹ برای PCN5 کاهش می‌یابد اما با بیشتر شدن درصد حجمی در PCNB5 جابجایی بیشتر شده و به ۰,۰۱۳ می‌رسد. گرچه برای هر سه درصد حجمی نسبت به حالت ۲ بارگذاری جابجایی کمتر شده است اما در این حالت PCN5 از وضعیت بهتری برخوردار است.

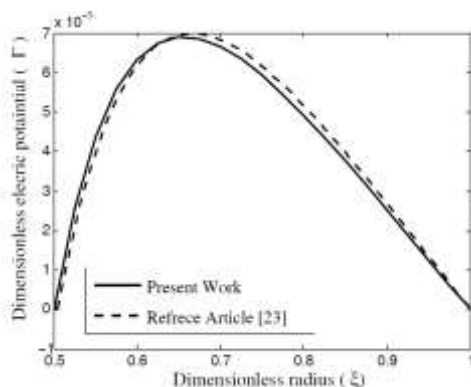
## ۱۰- صحت سنجی

نتایج این تحقیق با نتایج تحقیق مرجع [۲۳] که به تازگی انتشار یافته مقایسه گردید. با توجه به اینکه تحقیق مورد نظر بررسی رفتار خزشی کره ساخته شده از ماده پلیمری پیزوالکتریک می باشد و نانوکامپوزیت پیزوالکتریک با این هندسه در هیچ تحقیقی بررسی نشده است.

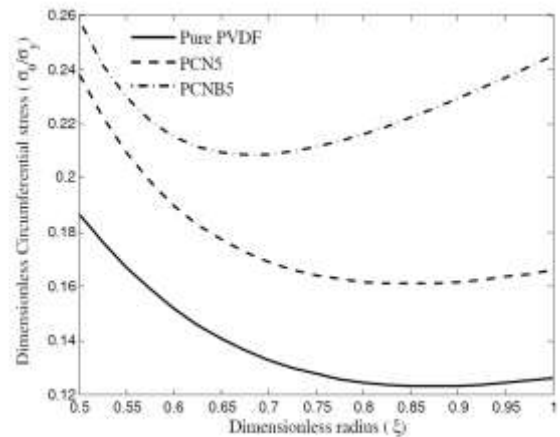
در نتیجه صحت سنجی برای حالتی که پلیمر خالص است انجام می شود. جهت بررسی صحت نتایج این تحقیق در حالت بار ترمو-مکانیکی، تنش شعاعی بدون بعد در شکل (۱۵)، جابجایی شعاعی بدون بعد در شکل (۱۶) و اختلاف پتانسیل الکتریکی بدون بعد در شکل (۱۷) برای هر دو تحقیق نشان داده شده است. شرایط مرزی در نظر گرفته شده همانند مقاله مرجع [۲۳] اعمال شده است تا امکان مقایسه نتایج فراهم گردد. با مقایسه نتایج مشاهده می گردد که اختلاف جزئی با نتایج مقاله مرجع وجود دارد که دلیل اصلی آن حل غیر خطی مسئله در این تحقیق می باشد.



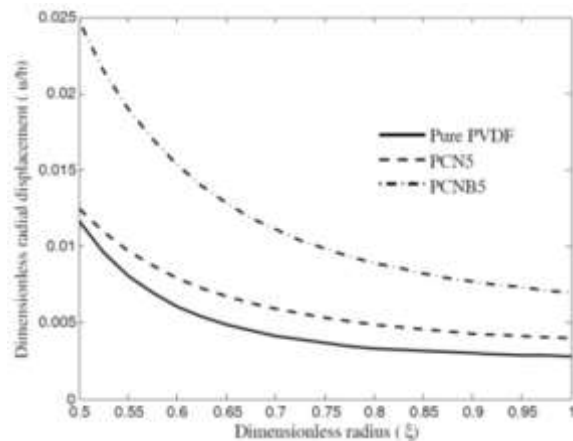
شکل (۱۵) مقایسه تنش شعاعی بدون بعد در بارگذاری ترمو- مکانیکی با مرجع برای حالت PVDF خالص



شکل (۱۶) مقایسه اختلاف پتانسیل الکتریکی بدون بعد در بارگذاری ترمو-مکانیکی با مرجع برای حالت PVDF خالص.



شکل (۱۳) تنش شعاعی بدون بعد در حالت ۳ بارگذاری برای سه درصد حجمی مختلف نانو کامپوزیت.



شکل (۱۴) جابجایی شعاعی بدون بعد در حالت ۳ بارگذاری برای سه درصد حجمی مختلف نانو کامپوزیت.

جابجایی شعاعی بدون بعد برای حالت ۳ بارگذاری بر اساس سه درصد حجمی مختلف در شکل (۱۴) نشان داده شده است. مشخص است که با اضافه شدن درصد نانولوله ها تا ۵ درصد باعث کم شدن جابجایی شعاعی مخزن نمی شود و با بیشتر شدن درصد حجمی جابجایی شعاعی افزایش نسبتا بیشتری خواهد داشت. می توان نتیجه گرفت که اعمال میدان مغناطیسی باعث افزایش جابجایی بدون بعد شعاعی مخزن می گردد و در حالتی که مخزن در میدان مغناطیسی قرار دارد حالت پلیمر خالص وضعیت مطلوب تری نسبت به حالت نانوکامپوزیت دارد.

می توان نتیجه گرفت به دلیل اثری که میدان مغناطیسی بر روی نانولوله های کربنی دارد و عدم اثر روی پلیمر خالص در این حالت افزودن الیاف کربنی مناسب نمی باشد.

نانوکامپوزیتی می‌گردد و استفاده از PCN5 و PCNB5 در حضور میدان مغناطیسی توصیه نمی‌شود.

## ۱۲- تشکر و قدردانی

از دانشگاه کاشان و همچنین ستاد ویژه توسعه فناوری نانو به دلیل حمایت مالی از این تحقیق تقدیر و تشکر به عمل می‌آید.

## ۱۳- پیوست

$$EM = C_{11} + E_1^2 + \mu H^2$$

$$q_{11} = C_{11} + E_1^2$$

$$q_{12} = 2C_{12} + 2E_1 E_2$$

$$q_{13} = C_{11} \alpha_r + 2C_{12} \alpha_\theta$$

$$q_{14} = E_1^2 \alpha_r + 2E_1 E_2 \alpha_\theta$$

$$q_{15} = C_{11} + E_1^2$$

$$q_{16} = 2C_{12} + 2E_1 E_2$$

$$q_{17} = \frac{Z_4}{Z_2}$$

$$q_{18} = \frac{Z_3}{Z_2} + \frac{Z_5}{Z_2}$$

$$q_{21} = C_{21} + E_1 E_2$$

$$q_{22} = C_{22} + C_{23} + 2E_2^2$$

$$q_{23} = C_{21} \alpha_r + 2(C_{22} + C_{23}) \alpha_\theta$$

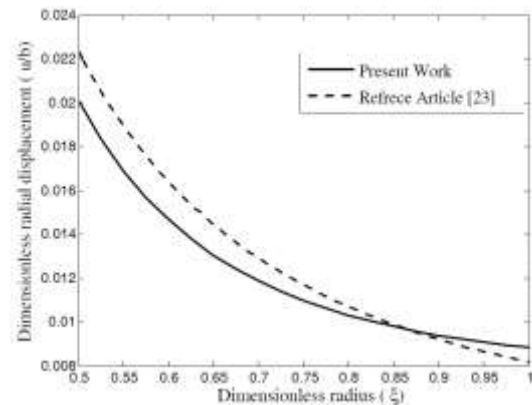
$$q_{24} = E_1 E_2 \alpha_r + 2E_2^2 \alpha_\theta$$

$$q_{25} = C_{21} + E_1 E_2$$

$$q_{26} = C_{22} + C_{23} + 2E_2^2$$

## ۱۴- مراجع

- [1] Wang, X. and Zhong, Z., "A Finitely Long Circular Cylindrical Shell of Piezoelectric/Piezomagnetic Composite under Pressuring and Temperature Change", *International Journal of Engineering Science*. Vol.41, No.20, pp. 2429-2445, 2003.
- [2] Eslami, M., Babaei, M., and Poultangari, R., "Thermal and Mechanical Stresses in a Functionally Graded Thick Sphere", *International Journal of Pressure Vessels and Piping*. Vol. 82, No.7, pp. 522-527, 2005.
- [3] Moiala, A., Li, Q., Kinloch, I., and Windle, A., "Thermal and Electrical Conductivity of Single-and Multi-walled Carbon Nanotube-epoxy Composites", *Composites Science and*



شکل (۱۷) مقایسه جابجایی شعاعی بدون بارگذاری ترمو-مکانیکی با مرجع برای حالت PVDF خالص.

## ۱۱- نتیجه گیری

در این تحقیق تحلیل الکترو-مگنتو-ترمو-مکانیکی مخزن کروی ساخته شده از مواد پلیمری پیزوالکتریک تقویت شده با نانولوله‌های کربنی چند جداره با رفتار غیر خطی بررسی گردید. مدول الاستیسیته از رابطه ویسکوالاستیک برگر با استفاده از رگرسیون غیر خطی محاسبه گردید. بنابراین مدول الاستیسیته تابعی از دما و تنش در هر شعاعی می‌باشد به همین دلیل ماده دارای رفتار غیر خطی می‌باشد. روش حل ذکر شده ترکیبی از یک روش نیمه تحلیلی و یک روش عددی در محاسبه تابع توزیع مدول الاستیسیته می‌باشد. مشاهده گردید که با افزایش نانولوله کربنی تا پنج درصد در حالت بارگذاری ترمو-مکانیکی وضعیت جابجایی و تنش‌ها بهتر می‌شود و در این حالت PCN5 وضعیت بهتری نسبت به سایر دارد.

همچنین در حالت بارگذاری الکترو-ترمو-مکانیکی وضعیت جابجایی و تنش‌ها از حالت قبل مطلوبتر است و در این حالت PVDF و PCN5 رفتار بسیار نزدیکی به یکدیگر دارند و با توجه به مدول الاستیک بیشتر PCN5 با خواص بهتر پیزوالکتریکی PVDF هر دو عملکرد تقریباً یکسانی دارند و PCNB5 در مقایسه وضعیت مناسب عملکردی ندارد. در این حالت مشاهده شد با انتخاب مقدار مناسبی از اختلاف پتانسیل الکتریکی اعمالی می‌توان جابجایی شعاعی را در محدوده مورد قبولی کنترل نمود.

در بارگذاری الکترو-مگنتو-ترمو-مکانیکی پلیمر پیزو الکتریک خالص وضعیت مطلوب‌تری دارد و مشخص شد که میدان مغناطیسی با تاثیر بر نانولوله‌های کربنی باعث افزایش جابجایی شعاعی و وضعیت نامناسب عملکردی مخزن

- new form of the rule of mixtures", *Carbon*. Vol.48, No.11, pp. 3218-3228, 2010.
- [14] Lau, K.-T., Chipara, M., Ling, H.-Y., and Hui, D." On the effective elastic moduli of carbon nanotubes for nanocomposite structures", *Composites Part B: Engineering*. vol. 35(2), pp. 95-101, 2004.
- [15] Newsome, R. and Andrei, E." Measurement of the pyroelectric coefficient of poly (vinylidene fluoride) down to 3 K", *Physical Review B*. vol. 55(11), p. 7264, 1997.
- [16] Tang, X.G., Hou, M., Zou, J., Truss, R., and Zhu, Z." The Creep Behaviour of Poly(vinylidene Fluoride)/ "Bud-Branched" Nanotubes Nanocomposites", *Composites Science and Technology*. vol.72, No.14, pp.1656-1664, Oct. 2012.
- [17] Jalili, N., "Piezoelectric-based Vibration Control: from Macro to Micro/nano Scale Systems", *Springer Science & Business Media*, 2009.
- [18] Fung, Y.-c. and Fung, Y., "Foundations of Solid Mechanics", Vol. 351, Prentice-Hall Englewood Cliffs, NJ, 1965.
- [19] Tiersten, H. F., "Linear Piezoelectric Plate Vibrations": Springer, 1969.
- [20] Ghorbanpour Arani, A., Kolahchi, R., Mosallaie Barzoki, A. A., and Loghman, A., "The Effect of Time-Dependent Creep on Electro-Thermo-Mechanical Behaviors of Piezoelectric Sphere using Mendelson's Method", *European Journal of Mechanics - A/Solids*. Vol.37, pp.318-328, Jan. 2013.
- [21] Loghman, A., Aleayoub, S. M. A., and Hasani Sadi, M., "Time-dependent Magneto Thermoelastic Creep Modeling of FGM Spheres using Method of Successive Elastic Solution", *Applied Mathematical Modelling*. Vol. 36, No.2, pp. 836-845, Mar. 2012.
- [22] Hosseini Kordkheili, S. A. and Livani, M., "Thermoelastic Creep Analysis of a Functionally Graded Various Thickness Rotating Disk with Temperature-dependent Material Properties", *International Journal of Pressure Vessels and Piping*. vol.111, pp.63-74, Nov. 2013.
- [23] Loghman, A. and Tourang, H., "Non-Stationary Electro-Thermo-Mechanical Creep Response and Smart Deformation Control of Thick-walled Sphere Made of Polyvinylidene Fluoride", *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*. pp.1-15, Sep. 2015.
- Technology*. Vol. 66, No.10, pp.1285-1288, 2006.
- [4] Seidel, G. D. and Lagoudas, D. C., "Micromechanical Analysis of the Effective Elastic Properties of Carbon Nanotube Reinforced composites", *Mechanics of Materials*. vol.38, No.8, pp. 884-907, 2006.
- [5] Salehi-Khojin, A. and Jalili, N." A Comprehensive Model for Load Transfer in Nanotube Reinforced Piezoelectric Polymeric Composites Subjected to Electro-Thermo-Mechanical Loadings", *Composites Part B: Engineering*. vol. 39, No.6, pp. 986-998, Oct. 2008.
- [6] Kong, T., Li, D., and Wang, X., "Thermo-Magneto-Dynamic Stresses and Perturbation of Magnetic Field Vector in a Non-Homogeneous Hollow Cylinder", *Applied Mathematical Modelling*. Vol.33, No.7, pp.2939-2950, 2009.
- [7] Wang, H., Dong, K., Men, F., Yan, Y., and Wang, X., "Influences of Longitudinal Magnetic Field on Wave Propagation in Carbon Nanotubes Embedded in Elastic Matrix", *Applied Mathematical Modelling*. vol.34, No.4, pp. 878-889, 2010.
- [8] Alashti, R. A., Khorsand, M., and Tarahhomi, M., "Thermo-elastic Analysis of a Functionally Graded Spherical Shell with Piezoelectric Layers by Differential Quadrature method", *Scientia Iranica*. Vol.20, No.1, pp.109-119, 2013.
- [9] Arani, A. G., Kolahchi, R., Barzoki, A. M., and Loghman, A., "Electro-thermo-mechanical behaviors of FGPM spheres using analytical method and ANSYS software", *Applied Mathematical Modelling*. Vol.36, No.1, pp.139-157, 2012.
- [10] Xu, Y., Wu, Q., Lei, Y., and Yao, F., "Creep Behavior of Bagasse Fiber Reinforced Polymer Composites", *Bioresource technology*. Vol.101, No.9, pp. 3280-3286, 2010.
- [11] Jia, Y., Peng, K., Gong, X.-l., and Zhang, Z." Creep and recovery of polypropylene/carbon nanotube composites", *International Journal of Plasticity*. Vol.27, No.8, pp. 1239-1251, 2011.
- [12] Arani, A. G., Mobarakeh, M. R., Shams, S., and Mohammadimehr, M., "The Effect of CNT Volume Fraction on the Magneto-Thermo-Electro-Mechanical Behavior of Smart Nanocomposite Cylinder", *Journal of mechanical science and technology*. Vol.26, No.8, pp. 2565-2572, 2012.
- [13] Omid, M., DT, H. R., Milani, A. S., Seethaler, R. J., and Arasteh, R." Prediction of the mechanical characteristics of multi-walled carbon nanotube/epoxy composites using a