

بهبود الگوریتم گرادیان نزولی برای موقعیت یابی زمین پایه در مختصات WGS84

سمیه نفر^۱، احیا یاوری^۲

nafar_elect812001@yahoo.com

۱- کارشناس ارشد مهندسی مخابرات، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، پژوهشکده سخت افزار و رایانه

۲- ارشناس مهندسی مخابرات، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، پژوهشکده سخت افزار و رایانه

چکیده

الگوریتم گرادیان نزولی در موقعیت یابی به عنوان یک روش تکرار شونده و بر اساس TDOA مورد استفاده قرار می گیرد. این الگوریتم در مختصات کارتیزی طراحی شده است. با توجه به اینکه مختصات منابع عمدتاً به صورت طول و عرض جغرافیایی است، تبدیل آن، به مختصات کارتیزی با خطا همراه است. از طرفی این الگوریتم در مختصات WGS84، نیازمند تکرارهای متوالی برای رسیدن به جواب مطلوب است. در این مقاله، ضمن اینکه الگوریتم گرادیان نزولی در مختصات WGS84 طراحی شده است، عملکرد این الگوریتم از لحاظ میزان خطا و نیز تعداد تکرارهای مورد نیاز برای دستیابی به دقت مورد نظر، در مختصات کارتیزین و در مختصات WGS84 با یکدیگر مقایسه می شود. در ادامه با ترکیب این دو دستگاه مختصات، روشی برای کاهش تکرارها و کاهش زمان اتلافی برای این الگوریتم پیشنهاد می شود. سپس میزان خطای متوسط ریشه مربعی در همه این روش ها با یکدیگر مقایسه می شود.

واژگان کلیدی: موقعیت یابی، گرادیان، TDOA, WGS84.

تاریخ دریافت مقاله : ۹۴/۰۱/۰۹

تاریخ پذیرش مقاله : ۹۴/۱۲/۱۳

۱- مقدمه

می‌شود، دستگاه مختصات کارتیزین می‌باشد. در این دستگاه، مختصات به صورت (x, y, z) بیان می‌شوند [۱۱]. الگوریتم گرادیان نزولی در مرجع [۱۲]، در دستگاه مختصات کارتیزین طراحی شده است. تبدیل مختصات منابع از WGS84 به مختصات کارتیزینی با خطا همراه است. تولید خطا در تبدیل مختصات منابع، موجب ایجاد خطای بسیار زیادی در موقعیت یابی می‌شود. به طوری که حتی اگر اندازه گیری‌های TDOA کاملاً دقیق باشد، خطای موقعیت یابی غیر قابل قبول و در حد کیلومتر خواهد بود.

در این مقاله، برای غلبه بر این مشکلات، الگوریتم گرادیان نزولی در مختصات WGS84 طراحی و فرمول بندی شده است. به این ترتیب می‌توان به دقت مورد نظر دست یافت. مشکل دیگری که در طراحی این الگوریتم در مختصات WGS84 وجود دارد این است که تعداد تکرارها خیلی زیاد است. در این مقاله برای کاهش تکرارها و همچنین دستیابی به دقت کافی در موقعیت یابی، ترکیب دو دستگاه مختصات کارتیزینی و WGS84 پیشنهاد شده است. به این ترتیب، با ترکیب دو دستگاه مختصات و تولید فرمول بندی جدید برای الگوریتم گرادیان نزولی می‌توان اولاً مشکلات تولید خطا را که در تبدیل مختصات منابع وجود داشت را مرتفع کرد. ثانیاً تعداد تکرارها برای رسیدن به جواب مورد نظر را بسیار کم نمود.

در این مقاله فرض شده است که مجهولات در مختصات کارتیزینی در سه بعد x و y و z هستند و در مختصات WGS84 به صورت طول و عرض جغرافیایی بر حسب درجه است و در کاربردهای زمین پایه، ارتفاع از سطح زمین صفر فرض شده است. در بخش دوم این مقاله، الگوریتم گرادیان در مختصات کارتیزین معرفی می‌شود.

۲- الگوریتم گرادیان در مختصات کارتیزینی

در این الگوریتم اگر (x_i, y_i, z_i) مختصات نقطه منبع i باشد و مختصات نقطه گیرنده (x, y, z) باشد، تابع f_i به صورت زیر تعریف می‌شود [۱۳]:

$$f_i(x, y, z) = \sqrt{(x - x_{i+1})^2 + (y - y_{i+1})^2 + (z - z_{i+1})^2} -$$

روش‌های مختلفی برای تخمین موقعیت بر اساس TDOA^۱ وجود دارد. از جمله می‌توان روش کوچکترین مربعی (LS^2) [۱]، روش سری تیلور (TS^3) [۲]، روش تقریبی ماکزیمم شباهت (AML^4) [۳]، روش فیلتر کالمن دوتایی (EKF^5) [۴] و ... را نامبرد. هر کدام از این روش‌ها پیچیدگی‌ها و محدودیت‌های خاص خود را دارند. همچنین به دلیل وجود نویز و تداخل [۵،۶] و تغییر در سرعت انتشار امواج در محیط‌های مختلف [۷]، معمولاً اندازه گیری‌های TDOA با خطا همراه است. مثلاً در روش LS، ممکن است به دلیل وجود خطا در اندازه گیری‌های اختلاف زمانی (TDOA)، در حل معادلات درجه دو به جواب موهومی برسیم. یا مثلاً در روش EKF، همگرایی به سمت جواب مورد نظر و کارایی ضعیف آن در محیط‌های نویزی از جمله مشکلات این روش است [۸]. در روش سری تیلور نیز، سرعت و همگرایی به سمت جواب مورد نظر بستگی به مختصات اولیه انتخابی دارد. انتخاب مقدار اولیه در عمل خیلی ساده نیست و ممکن است همگرایی به سمت جواب مورد نظر حاصل نشود. در همه این الگوریتم‌ها، تعداد منابع بایستی بیشتر از تعداد بعد مجهولات در مختصات کارتیزین باشد [۹]. در این مقاله، الگوریتم مورد استفاده برای موقعیت یابی، الگوریتم گرادیان نزولی است.

این الگوریتم با وجود اینکه نیازمند به یک مقدار اولیه است و همچنین تعداد تکرارها برای رسیدن به جواب مورد نظر زیاد است، اما همگرایی خوبی به سمت جواب مورد نظر در طی تکرارهای متوالی دارد و تعداد مجهولات می‌تواند با تعداد منابع مساوی باشد. مختصات منابع معمولاً در WGS84^۶ معین می‌شوند. WGS84 یک دستگاه مختصات است که در آن، سطح زمین به صورت بیضی مدل شده است و در موقعیت یابی معمولاً از این دستگاه مختصات استفاده می‌شود که در آن، مختصات به صورت طول^۷ و عرض^۸ و ارتفاع^۹ جغرافیایی بیان می‌شوند. مبدا این دستگاه مختصات، در مرکز جرم زمین در نظر گرفته شده است [۱۰]. دستگاه مختصات دیگر که از آن کمتر در موقعیت یابی استفاده

^۶ Word Geodetic System 1984

^۷ Longitude

^۸ Latitude

^۹ Altitude

^۱ Time Delay Of Arrival

^۲ Least Square

^۳ Taylor Series

^۴ Approximate maximum Likelihood

^۵ Extended Kalman Filter

می‌شود. در این صورت مقدار تقریبی برای تابع Φ به صورت زیر بدست می‌آید [۱۳]:

$$\begin{aligned} & \Phi(x_0 - \lambda g_{10}, y_0 - \lambda g_{20}, z_0 - \lambda g_{30}) \\ &= \sum_{i=1}^{N-1} [\varphi_i(x_0 - \lambda g_{10}, y_0 - \lambda g_{20}, z_0 - \lambda g_{30})]^2 \\ &\approx \left\{ \sum_{i=1}^{N-1} \varphi_i^2 - 2\lambda \left[\sum_{i=1}^{N-1} \varphi_i \left(g_{10} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} + g_{20} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} + g_{30} \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} \right) \right] + \lambda^2 \left[\sum_{i=1}^{N-1} \left(g_{10} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} + g_{20} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} + g_{30} \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} \right)^2 \right] \right\}_{(x_0, y_0, z_0)} \quad (۸) \end{aligned}$$

اگر مشتق تابع Φ بر حسب λ را مساوی صفر قرار دهیم، در این صورت داریم:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = 0 \quad (۹)$$

$$\lambda = \left[\frac{\sum_{i=1}^{N-1} \varphi_i \left(g_{10} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} + g_{20} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} + g_{30} \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} \right)}{\sum_{i=1}^{N-1} \left(g_{10} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} + g_{20} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} + g_{30} \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} \right)^2} \right]_{(x_0, y_0, z_0)} \quad (۱۰)$$

با محاسبه λ ، نقطه جدید (x_1, y_1, z_1) نیز بدست می‌آید. روش بالا به صورت تکرار شونده اجرا می‌شود تا جایی که مقدار تابع Φ به اندازه کافی کم شود.

به طور خلاصه روش گرادیان مراحل زیر را دارد:

۱- نقطه (x_0, y_0, z_0) به عنوان مختصات انتخابی برای حدس اولیه در نظر بگیرید.

۲- $\frac{\partial \Phi}{\partial y}, \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \frac{\partial \Phi}{\partial x}$ را به ازای $i = 1, 2, \dots, N-1$ محاسبه کنید.

۳- آرایه گرادیان g_{10}, g_{20}, g_{30} را با استفاده از رابطه (۵)، در نقطه (x_0, y_0, z_0) بدست بیاورید.

۴- مقدار λ را با استفاده از رابطه (۱۰) محاسبه کنید.

۵- مقدار (x_1, y_1, z_1) را با استفاده از رابطه (۶) بدست بیاورید.

۶- اگر $\Phi \approx 0$ بدست آمد، پایان و گرنه با (x_1, y_1, z_1) به عنوان حدس اولیه در نظر گرفته و مراحل ۲ تا ۶ را تکرار کنید. در موقعیت یابی در فواصل دور، مکان منابع معمولاً در مختصات WGS84 بیان می‌شود. تبدیل مختصات منابع از WGS84 به کارتزینی با خطا همراه است. در بخش‌های بعد، خواهیم دید که وجود خطا در تبدیل مختصات منابع، موجب ایجاد خطای غیر قابل قبولی در موقعیت یابی خواهد شد. به همین دلیل در بخش ۳، این الگوریتم در مختصات WGS84 فرمول بندی شده است.

۳- تبدیل مختصات کارتزینی به مختصات WGS84

در این تبدیل دانستن مفاهیم زیر الزامی است.

$$\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2} = r_{i+1,1} + \varepsilon_{i+1,1} \quad (i = 1, 2, \dots, n-1) \quad (۱)$$

که در آن تخمینی از TDOA نقطه $(i+1)$ نسبت به نقطه اول است. و $\varepsilon_{i+1,1}$ خطای این تخمین است که متغیرهایی، مستقل از هم، رندم گوسی با متوسط صفر هستند و کواریانس آنها به صورت زیر است:

$$Q = E\{\varepsilon\varepsilon^T\} = \text{diag}[\sigma^2 \dots \sigma^2] \quad (۲)$$

بطوریکه σ گستره خطای تخمین است.

تابع φ_i ، خطای تخمین فاصله نسبت به مقدار واقعی آن است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\varphi_i(x, y, z) = f_i(x, y, z) - r_{i+1,1} - \varepsilon_{i+1,1}; \quad (i = 1, 2, \dots, n-1) \quad (۳)$$

با استفاده از توابع تعریف شده در رابطه (۳)، تابع مربعات خطا به صورت زیر ساخته می‌شود:

$$\Phi(x, y, z) = \sum_{i=1}^{N-1} [\varphi_i(x, y, z)]^2 \quad (۴)$$

برای داشتن دقت مناسب، تابع $\Phi(x, y, z)$ باید کمترین مقدار را به خود بگیرد. برای پیمایش مسیری برای بدست آوردن کمترین مقدار یک تابع معمولاً از آن تابع مشتق گرفته می‌شود، لذا گرادیان تابع $\Phi(x, y, z)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{cases} g_{10} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0, z_0)} = 2 \left[\sum_{i=1}^{N-1} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right) \varphi_i \right]_{(x_0, y_0, z_0)} \\ g_{20} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0, z_0)} = 2 \left[\sum_{i=1}^{N-1} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \right) \varphi_i \right]_{(x_0, y_0, z_0)} \\ g_{30} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{(x_0, y_0, z_0)} = 2 \left[\sum_{i=1}^{N-1} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial z} \right) \varphi_i \right]_{(x_0, y_0, z_0)} \end{cases} \quad (۵)$$

با شروع از نقطه (x_0, y_0, z_0) ، به صورت مرحله به مرحله به سمت کمینه شدن مقدار گرادیان، پیشروی می‌شود، پارامتر λ به عنوان میزان پرش برای هر مرحله است. در این صورت نقطه جدید (x_1, y_1, z_1) به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{cases} x_1 = x_0 - \lambda g_{10} \\ y_1 = y_0 - \lambda g_{20} \\ z_1 = z_0 - \lambda g_{30} \end{cases} \quad (۶)$$

انتخاب مقدار مناسب برای λ بایستی به گونه ای باشد که (x_1, y_1, z_1) ، کمترین مقدار را برای تابع Φ بدست بیاورد. بنابراین میزان پرش در هر مرحله متغیر و متناسب با کمینه شدن خطا است. یعنی:

$$\Phi(x_1, y_1, z_1) \approx \min\{\Phi(x_0 - \lambda g_{10}, y_0 - \lambda g_{20}, z_0 - \lambda g_{30})\} \quad (۷)$$

برای تابع $\varphi_i(x_0 - \lambda g_{10}, y_0 - \lambda g_{20}, z_0 - \lambda g_{30})$ در نقطه (x_0, y_0, z_0) بسط سری تیلور اعمال می‌شود [۱۴، ۱۳]. در این بسط از توان‌های بالا صرف نظر می‌شود و برای سادگی، فقط مرتبه صفر و یک برای بسط تابع منظور

۳-۱- درجه و دسیمال درجه^۱

گاهی اوقات لازم است، مختصات جغرافیایی در محاسبات، به شکل عددی، بر حسب درجه، در مبنای ده محاسبه شود، که به آن دسیمال درجه می گویند. برای مثال ۳۰ درجه و ۳۰ دقیقه و ۰ ثانیه به ۳۰،۵۰ تبدیل می شود. رابطه تبدیل درجه به دسیمال درجه به صورت زیر است:

$$\text{Decimal Degrees} = \text{Degrees} + \text{Minutes}/60 + \text{Seconds}/3600 \quad (11)$$

۳-۲- تبدیل طول و عرض جغرافیایی بر حسب درجه به مختصات کارتزین

نقطه (lat, lon, h = 0) فرض کنید، که در آن lat عرض جغرافیایی، lon طول جغرافیایی، h ارتفاع از مبدا زمین است. مختصات کارتزینی این نقطه، با استفاده از روابط زیر بدست می آید [۱۵]:

$$x = \left(\frac{a}{\chi} + h\right) \cos(\text{lat}) \cos(\text{lon}) \quad (12)$$

$$y = \left(\frac{a}{\chi} + h\right) \cos(\text{lat}) \sin(\text{lon}) \quad (13)$$

$$z = \left(\frac{a(1-e^2)}{\chi} + h\right) \sin(\text{lat}) \quad (14)$$

$$\chi = \sqrt{1 - e^2 \sin^2(\text{lon})} \quad (15)$$

که:

$$a = 6378137 \text{ (محور بزرگتر مرجع بیضوی)},$$

$$b = 6356752.3142 \text{ (محور کوچکتر مرجع بیضوی)},$$

$$e^2 = 1 - (b/a)^2 \text{ (توان دو گریز از مرکز مرجع بیضوی)}$$

در این روابط، طول و عرض جغرافیایی بر حسب رادیان هستند. هر ۱۸۰ درجه، π رادیان است. بنابراین هر رادیان، $\pi/180$ درجه است و هر درجه، $180/\pi$ رادیان است. بنابراین برای تبدیل درجه به رادیان و بر عکس از روابط زیر استفاده می شود:

$$\text{radian} = \text{degree} * \pi/180 \quad (16)$$

$$\text{degree} = \text{radian} * 180/\pi \quad (17)$$

۳-۳- محاسبه فاصله دو نقطه بر اساس طول و عرض جغرافیایی

محاسبه فاصله دو نقطه که به صورت درجه داده شده اند و فاصله زیادی از هم دارند با استفاده از رابطه فیثاغورث به صورت دقیق بدست نمی آید و محاسبات را دچار خطا می کند. رابطه (۱۸)، کمان فاصله دو نقطه (lat₁, lon₁) و

(lat₂, lon₂)، که در سطح زمین قرار دارند و از یکدیگر دور هستند، را محاسبه می کند [۱۷، ۱۶]:

$$d((\text{lat}_2, \text{lon}_2), (\text{lat}_1, \text{lon}_1)) = R * \text{atan2}(\sqrt{a}, \sqrt{1-a}) \quad (18)$$

به طوری که R، قطر کره زمین بر حسب متر و برابر عدد ۱۲۷۳۹۲۵۷،۵ است و:

$$a = \sin^2\left(\frac{\text{lat}_2 - \text{lat}_1}{2}\right) + \cos(\text{lat}_1) * \cos(\text{lat}_2) * \sin^2\left(\frac{\text{lon}_2 - \text{lon}_1}{2}\right) \quad (19)$$

$$\theta(x, y) = \text{atan2}(y, x) = 2 \arctan \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2} + x} \quad (20)$$

رابطه کمان فاصله با استفاده از طول عرض جغرافیایی رابطه خطی نیست. بنابراین برای خطی سازی این رابطه از روش بسط سری تیلور استفاده می شود [۱۸]. در این بسط نیاز به مشتق گیری از تابع atan2 است. لذا مشتق تابع atan2 که در الگوریتم گرادیان نزولی استفاده می شود، به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\frac{\partial \text{atan2}(y, x)}{\partial x} = \frac{\partial \arctan\left(\frac{y}{x}\right)}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2} = -\cos \alpha \quad (21)$$

$$\frac{\partial \text{atan2}(y, x)}{\partial y} = \frac{\partial \arctan\left(\frac{y}{x}\right)}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2} = \sin \alpha \quad (22)$$

برای $x > 0$ یا $y \neq 0$ داریم:

$$d\theta = \frac{\partial \text{atan2}(y, x)}{\partial x} dx + \frac{\partial \text{atan2}(y, x)}{\partial y} dy = -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy \quad (23)$$

اگر مختصات (lat₁, lon₁) را به عنوان یک نقطه ثابت در نظر بگیریم، با استفاده از روابط (۱۸) تا (۲۳) مشتق جزئی فاصله، با استفاده از مجموعه روابط زیر محاسبه می شود:

$$\frac{\partial a}{\partial \text{lat}_2} = \sin(\text{lat}_2 - \text{lat}_1) * \cos(\text{lat}_2 - \text{lat}_1) + (\cos(\text{lat}_1) * -1 * \sin(\text{lat}_2) * \sin^2(\text{lon}_2 - \text{lon}_1)). \quad (24)$$

$$\frac{\partial a}{\partial \text{lon}_2} = \cos(\text{lat}_1) * \cos(\text{lat}_2) * \sin(\text{lon}_2 - \text{lon}_1) * \cos(\text{lon}_2 - \text{lon}_1) \quad (25)$$

$$y = \sqrt{a} \quad (26)$$

$$x = \sqrt{1-a} \quad (27)$$

$$\frac{\partial y}{\partial a} = \frac{1}{2} * \left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right) \quad (28)$$

$$\frac{\partial x}{\partial a} = -\frac{1}{2} * \left(\frac{1}{\sqrt{1-a}}\right) \quad (29)$$

$$\frac{\partial d}{\partial \text{lat}_2} = R * \left(-\frac{y}{x^2 + y^2} * \frac{\partial x}{\partial a} * \frac{\partial a}{\partial \text{lat}_2} + \frac{x}{x^2 + y^2} * \frac{\partial y}{\partial a} * \frac{\partial a}{\partial \text{lat}_2}\right) \quad (30)$$

$$\frac{\partial d}{\partial \text{lon}_2} = R * \left(-\frac{y}{x^2 + y^2} * \frac{\partial x}{\partial a} * \frac{\partial a}{\partial \text{lon}_2} + \frac{x}{x^2 + y^2} * \frac{\partial y}{\partial a} * \frac{\partial a}{\partial \text{lon}_2}\right) \quad (31)$$

¹ Degrees and Decimal Degrees

محاسبه مشتق تابع Φ در مختصات کارتزین، برای $i = 1, 2, \dots, N - 1$ به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0, z_0)} = \frac{x - x_{i+1}}{\sqrt{(x - x_{i+1})^2 + (y - y_{i+1})^2 + (z - z_{i+1})^2}} - \frac{x - x_1}{\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2}} \Big|_{(x_0, y_0, z_0)} \quad (39)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_{i+1}}{\sqrt{(x - x_{i+1})^2 + (y - y_{i+1})^2 + (z - z_{i+1})^2}} - \frac{y - y_1}{\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2}} \Big|_{(x_0, y_0, z_0)} \quad (40)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_{i+1}}{\sqrt{(x - x_{i+1})^2 + (y - y_{i+1})^2 + (z - z_{i+1})^2}} - \frac{z - z_1}{\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2}} \Big|_{(x_0, y_0, z_0)} \quad (41)$$

چون معمولاً، مختصات منابع در ابتدا به صورت طول و عرض جغرافیایی گزارش می‌شود، به جای محاسبه فاصله بین فرستنده‌ها و گیرنده با استفاده از رابطه فیثاغورث، از رابطه محاسبه فاصله بر اساس طول و عرض جغرافیایی استفاده می‌شود. در این صورت از خطاهای ناشی از تبدیل مختصات منبع به مختصات کارتزینی جلوگیری به عمل می‌آید. برای افزایش سرعت، صورت کسرهای رابطه (۴۲)، (۴۳) و (۴۴) در مختصات کارتزینی باقی می‌مانند و در نتیجه برای محاسبه مقادیر گرادیان، از ترکیبی از قوانین و روابط موجود در مختصات کارتزینی و مختصات WGS84 استفاده می‌شود و رابطه نسبتاً دقیق تری بدست می‌آید که سرعت مناسب تری نسبت به روش قبلی دارد. لذا داریم:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0, z_0), (lat_0, lon_0)} = \frac{x - x_{i+1}}{d((lat, lon), (lat_{i+1}, lon_{i+1}))} - \frac{x - x_1}{d((lat, lon), (lat_1, lon_1))} \Big|_{(x_0, y_0, z_0), (lat_0, lon_0)} \quad (42)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0, z_0), (lat_0, lon_0)} = \frac{y - y_{i+1}}{d((lat, lon), (lat_{i+1}, lon_{i+1}))} - \frac{y - y_1}{d((lat, lon), (lat_1, lon_1))} \Big|_{(x_0, y_0, z_0), (lat_0, lon_0)} \quad (43)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{(x_0, y_0, z_0), (lat_0, lon_0)} = \frac{z - z_{i+1}}{d((lat, lon), (lat_{i+1}, lon_{i+1}))} - \frac{z - z_1}{d((lat, lon), (lat_1, lon_1))} \Big|_{(x_0, y_0, z_0), (lat_0, lon_0)} \quad (44)$$

به این ترتیب الگوریتم گرادیان نزولی، برای استفاده در فواصل طولانی با خطای کمتر و بهبود در تعداد تکرارها، به صورت زیر اصلاح می‌شود.

۱- نقطه $(lat_0, lon_0, h = 0)$ به عنوان مختصات انتخابی برای حدس اولیه در نظر بگیرید این نقطه را به مختصات کارتزینی (x_0, y_0, z_0) را با استفاده از روابط موجود تبدیل کنید.

۲- $\frac{\partial \Phi}{\partial z}, \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}$ را به ازای $i = 2, 3, \dots, N-1$ با استفاده از روابط (۴۲) تا (۴۴) محاسبه کنید.

۴- تبدیل الگوریتم گرادیان از مختصات کارتزینی به مختصات WGS84

فرض کنید مختصات منابع را به صورت (lat_i, lon_i) ، $(i = 1, 2, \dots, n)$ داریم و مختصات گیرنده در نقطه (lat, lon) است. همان طوری که گفته شد، ارتفاع از سطح زمین مقدار ثابت صفر در نظر گرفته می‌شود. در این صورت، تابع f_i و Φ_i به صورت زیر باز نویسی می‌شوند:

$$f_i(lat, lon) = d((lat, lon), (lat_{i+1}, lon_{i+1})) - d((lat, lon), (lat_1, lon_1)) \quad (32)$$

$$\Phi_i(lat, lon) = f_i(lat, lon) - r_{i+1,1} + \varepsilon_{i+1,1} \quad (33)$$

$$\Phi(lat, lon) = \sum_{i=1}^{N-1} [\Phi_i(lat, lon)]^2 \quad (34)$$

همانند قبل برای داشتن دقت مناسب، تابع $\Phi(lat, lon)$ بایستی کمترین مقدار را به خود بگیرد. گرادیان تابع $\Phi(lat, lon)$ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{cases} g_{10} = \frac{\partial \Phi}{\partial lat} \Big|_{(lat_0, lon_0)} = 2 \left[\sum_{i=1}^{N-1} \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial lat} \right) \Phi_i \right] \Big|_{(lat_0, lon_0)} \\ g_{20} = \frac{\partial \Phi}{\partial lon} \Big|_{(lat_0, lon_0)} = 2 \left[\sum_{i=1}^{N-1} \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial lon} \right) \Phi_i \right] \Big|_{(lat_0, lon_0)} \end{cases} \quad (35)$$

در این صورت نقطه جدید (lat_1, lon_1) به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{cases} lat_1 = lat_0 - \lambda g_{10} \\ lon_1 = lon_0 - \lambda g_{20} \end{cases} \quad (36)$$

انتخاب مقدار مناسب برای λ بایستی به گونه ای باشد که نقطه (lat_1, lon_1) کمترین مقدار را برای تابع Φ بدست بیاورد. یعنی:

$$\Phi(lat_1, lon_1) \approx \min\{\Phi(lat_0 - \lambda g_{10}, lon_0 - \lambda g_{20})\} \quad (37)$$

برای این منظور، با قرار دادن مشتق تابع Φ مساوی صفر، مقدار λ در نقطه (lat_0, lon_0) محاسبه می‌شود:

$$\lambda = \left[\frac{\sum_{i=1}^{N-1} \Phi_i (g_{10} \frac{\partial \Phi_i}{\partial lat} + g_{20} \frac{\partial \Phi_i}{\partial lon})}{\sum_{i=1}^{N-1} (g_{10} \frac{\partial \Phi_i}{\partial lat} + g_{20} \frac{\partial \Phi_i}{\partial lon})^2} \right] \Big|_{(lat_0, lon_0)} \quad (38)$$

با استفاده از این روابط، مراحل ۲ تا ۶ الگوریتم گرادیان نزولی به صورتی که در بخش ۲ شرح داده شده است، تکرار می‌شود.

۵- بهبود عملکرد الگوریتم گرادیان نزولی در مختصات WGS84 و کارتزین

برای اینکه الگوریتم گرادیان خطای کمتری داشته باشد و همچنین تعداد تکرارهای آن نیز کمتر شود، ترکیبی از مختصات کارتزینی و مختصات WGS84 در محاسبات فاصله‌ها در این الگوریتم استفاده شده است. در این صورت تابع (۳۴) تغییری نمی‌کند.

در فواصل طولانی از دستگاه مختصات WGS84 استفاده می‌شود. در دستگاه مختصات کارترین تعداد تکرارها کمتر است و در دستگاه مختصات WGS84 میزان خطا برای استفاده در فواصل طولانی کمتر است. اما استفاده ترکیبی از روابط موجود در دو دستگاه مختصات می‌تواند مزایا و معایب هر دو روش را بپوشاند. در جدول (۱) ملاحظه می‌شود که در روش ترکیبی تعداد تکرارها بسیار کمتر از روش‌های دیگر است و میزان خطا نیز در مقایسه با روش کارترینی بسیار کمتر و تقریباً مساوی با استفاده مطلق از مختصات WGS84 است.

همچنین برای ارزیابی کارایی این روش‌ها، به شکل‌های (۱) و (۲) توجه کنید. در این رسم این شکل‌ها فرض بر این است که میزان خطا در TDOAها صفر است و نیز موقعیت گیرنده، ثابت در نظر گرفته شده است. در شکل (۱)، با افزایش فاصله فرستنده‌ها از گیرنده میزان خطا در روش پیشنهادی و مختصات WGS84 بسیار بهتر از مختصات کارترینی است. در شکل (۲)، تعداد تکرارها بهتر از روش WGS84 و مختصات کارترینی است. پس بنابراین، در کل می‌توان نتیجه گرفت که استفاده ترکیبی از دو دستگاه مختصات در الگوریتم گرادیان نزولی کارآمد است.

۳- آرایه گرادیان g_{10}, g_{20}, g_{30} را در نقطه (x_0, y_0, z_0) ، با استفاده از رابطه (۵)، بدست بیاورید.

۴- مقدار λ را با استفاده از رابطه (۱۰) محاسبه کنید.

۵- مقدار (x_1, y_1, z_1) را با استفاده از رابطه (۶) بدست بیاورید و آن را به مختصات WGS84 $(lat_1, lon_1, h = 0)$ تبدیل کنید.

۶- اگر در رابطه (۳۴)، $\Phi \approx 0$ بدست آمد، پایان و گرنه $(lat_1, lon_1, h = 0)$ را به عنوان حدس اولیه در نظر گرفته و مراحل ۲ تا ۶ را تکرار کنید.

۶- نتایج عملکرد این روش‌ها

فرض کنید که سه تا منبع داریم و موقعیت دقیق منابع برای ما مشخص است. ریشه مربعی متوسط خطای مقادیر TDOA محاسبه شده است و جدول (۱) برای مقایسه خطا در دستگاه مختصات متفاوت، تدوین شده است. در محاسبه مقادیر این جدول، موقعیت منابع و گیرنده و نیز مقدار اولیه ثابت در نظر گرفته شده است.

استفاده از دستگاه مختصات کارترین در فواصل کوتاه مناسب است.

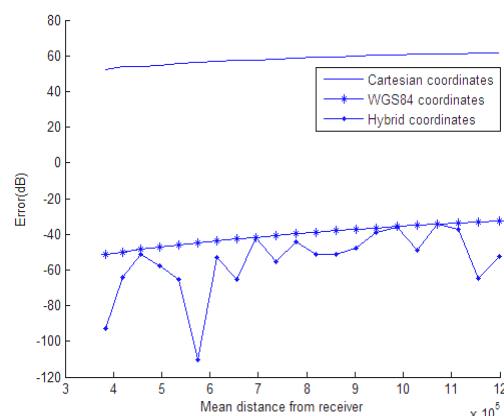
جدول (۱) مقایسه تعداد تکرارها و ریشه مربعی متوسط خطا بر حسب متر در الگوریتم گرادیان در دستگاه مختصات متفاوت.

تعداد تکرارها در ترکیب مختصات کارترین و WGS84	RMSE تخمین موقعیت در ترکیب مختصات کارترین و WGS84	تعداد تکرارها در مختصات WGS84	RMSE تخمین موقعیت در مختصات WGS84	تعداد تکرارها در مختصات کارترین	RMSE تخمین موقعیت در مختصات کارترین	RMSE در مقادیر TDOA
۸۴	۰,۰۰۰۲	۱۰۸۵	۰,۰۰۳۹	۳۵۲	۱۴۰۷	۰
۸۴	۲,۹۲۵۹	۱۰۸۵	۲,۹۲۲۵	۳۵۲	۱۴۱۰	۱
۸۳	۵,۸۵۲۸	۱۰۸۵	۵,۸۴۹۳	۳۵۲	۱۴۱۳	۴
۸۳	۸,۷۸۰۳	۱۰۸۵	۸,۷۷۶۴	۳۵۲	۱۴۱۵	۹
۸۳	۱۱,۷۰۷۵	۱۰۸۵	۱۱,۷۰۴۰	۳۵۲	۱۴۱۸	۱۶
۸۲	۱۴,۶۳۵۱	۱۰۸۵	۱۴,۶۳۱۹	۳۵۲	۱۴۲۱	۲۵
۸۱	۱۷,۵۶۳۴	۱۰۸۵	۱۷,۵۶۰۲	۳۵۲	۱۴۲۴	۳۶
۸۱	۲۰,۴۹۲۸	۱۰۸۵	۲۰,۴۸۹۰	۳۵۲	۱۴۲۷	۴۹
۸۱	۲۳,۴۲۱۹	۱۰۸۵	۲۳,۴۱۸۱	۳۵۲	۱۴۲۹	۶۴
۸۱	۲۶,۳۵۱۰	۱۰۸۵	۲۶,۳۴۷۶	۳۵۲	۱۴۳۲	۸۱
۸۰	۲۹,۲۸۰۶	۱۰۸۵	۲۹,۲۷۷۶	۳۵۲	۱۴۳۵	۱۰۰

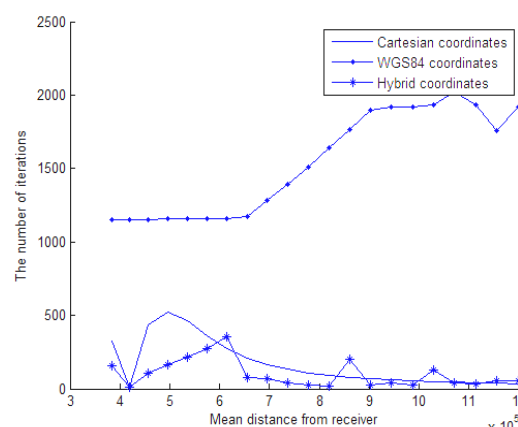
به ۰,۰۰۳۹ متر کاهش یافته، اما تعداد تکرارها از ۳۵۲ به ۱۰۸۵ افزایش می‌یابد. تعداد تکرارها در این حالت بسیار زیاد است و برای فرار از این مشکل، ترکیب دو دستگاه مختصات برای فرمول بندی این الگوریتم پیشنهاد شده است. در این حالت، با تقریباً همان میزان خطا، تعداد تکرارها به ۸۴ کاهش می‌یابد که حتی از تعداد تکرارهای مختصات کارتزینی نیز کمتر است.

۸- مراجع

- [1] Cheung, K.W., So, H.C., Ma, W.K. and Chan, Y.T., "Least Squares Algorithms for Time-of-Arrival Based Mobile Location", IEEE Trans. Signal Process., Vol.52, No.4, pp.1121-1130, April 2004.
- [2] Foy, W. H., "'Position-location Solutions by Taylor-series Estimation", IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst., Vol.12, pp.187-194, Mar. 1976.
- [3] Chan, Y. T., Hang, H. Y. C. and Ching, P. C., "Exact and Approximate Maximum Likelihood Localization Algorithms", IEEE Trans. Vehicular Technology, Vol.55, No.1, pp.10-16, Jan. 2006.
- [4] Najar, M., Vidal, J., "Kalman Tracking Based on TDOA for UMTS Mobile Location", IEEE International Symp. Personal, Indoor & Mobile Radio Communications, Vol.1, pp.45-49, 2001
- [5] Lee, C. O., Boyce, Jr., Sherman C. Lo, J. David Powell, Per, K., "Analysis of Noise and Cycle Selection in a Loran Receiver" Proceedings of the 35th Annual Convention and Technical Symposium of the International Loran Association, pp.1-11, October, 2006.
- [6] Jahshan, A. Bhatti, Todd E. Humphreys, "Development and Demonstration of a TDOA-Based GNSS Interference Signal Localization System", IEEE/ION Position Location and Navigation Symposium (PLANS), pp.1-8, 2012.
- [7] Lo, S., "The Loran Integrity Performance Panel", Proceedings of the 31st Annual International Loran Association Meeting, Oct. 2002.
- [8] Lee, S. C., Lee, W. R., You, K. H., "TDOA Based UAV Localization using Dual-EKF Algorithm", International Journal of Control and Automation, Vol.2, No.4, December 2009.
- [9] Shen, G., Zetik, R., Thomä, R. S., "Performance Comparison of TOA and TDOA Based Location Estimation Algorithms in LOS Environment", IEEE Proceedings of the 5th Workshop on Positioning, Navigation and Communication, 2008.
- [10] Yong, S. J., "Design and Implementation of Embedded GPS System", Computer Science and Automation Engineering (CSAE), IEEE International, may 2012.



شکل (۱) مقایسه میزان خطا بر حسب dB در دستگاه مختصات متفاوت با افزایش فاصله منابع از گیرنده.



شکل (۲) مقایسه تعداد تکرارها در دستگاه مختصات متفاوت با افزایش فاصله منابع از گیرنده.

۷- نتیجه گیری

در این مقاله تخمین موقعیت گیرنده با استفاده از روش گرادیان انجام شده است. این روش در دو دستگاه مختصات کارتزینی و مختصات WGS84 و همچنین در ترکیبی از دو دستگاه مختصات یاد شده، پیاده سازی شده است. در فواصل دور که معمولاً از دستگاه WGS84 برای گزارش مختصات منابع استفاده می‌شود، تعیین موقعیت با استفاده از روش‌های موجود در دستگاه مختصات کارتزینی با خطای بسیار زیادی همراه است. به طوری که میزان خطا با استفاده از این دستگاه مختصات در حد کیلومتر است. این خطا حتی در صورت عدم وجود خطا در مقادیر TDOA نیز وجود دارد. از این رو، برای اجتناب از این مشکلات، از دستگاه مختصات WGS84 برای فرمول بندی این الگوریتم استفاده شده است. در این صورت میزان ریشه مربعی متوسط خطا، در حالتی که در مقادیر TDOA خطا وجود ندارد، از ۱۴۰۷ متر

- [11] Christl, M., "Location-Aware Environmental Monitoring For Mobile Workers", Master's Thesis, Computer Science - Commercial Information Technology, 2008.
- [12] ZHANG, G. L., Tan, Z., "A new TDOA Algorithm Based on Taylor Series Expansion in Cellular Networks", *Front. Electr. Electron. Eng. China*, pp.40-43, 2008.
- [13] Osler, J. T., "Taylor's Series Generalized for Fractional Derivative and Applications", *SIAM J. Math. Anal. Vol.2. No.1*, pp.37-48, February 1971.
- [14] Mosavi, M. R., Azarshahi, S., Emamgholipour, I., Abedi, A. A., "Least Squares Techniques for GPS Receivers Positioning Filter using Pseudo-Range and Carrier Phase Measurements", *Iranian Journal of Electrical & Electronic Engineering*, Vol.10, No.1, pp.18-26, March 2014.
- [15] Drake, S. P. "Converting GPS Coordinates ($\phi\lambda h$) to Navigation Coordinates", DSTO Electronics and Surveillance Research Laboratory, April, 2002.
- [16] Rengarajan M. and Anitha, Dr. G., "Algorithm Development and Testing of Low Cost Waypoint Navigation System", *ESTIJ*, Vol.3, No.2, pp. 411-415, April 2013.
- [17] Lawrence, N. P., Hansen, H. J. and Abbott, D., "3-D low Earth Orbit Vector Estimation of Faraday Rotation and Path Delay", *IEEE Access*, Vol.3, 2015.
- [18] Hargreaves, C., "ASF Measurement and Processing Techniques, to Allow Harbour Navigation at High Accuracy with eLoran", MSc Dissertation, University of Nottingham, Nottingham, UK, 2010.